Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 6 – 19 novembre 2015
Alcune soluzioni

4) Stabilire se la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = (xy - \sin(z))\,dx + (\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z})\,dy + (\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z))\,dz$$

è esatta nel semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e in caso affermativo calcolarne le primitive.

Si verifica facilmente che la forma è chiusa essendo

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy - \sin(z)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z}(xy - \sin(z)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right).$$

Allora, essendo il semipiano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ stellato, la forma è anche esatta.
Per calcolare la primitiva $F(x,y,z)$ integriamo in x l'equazione $F_x(x,y,z) = xy - \sin(z)$ e otteniamo

$$F(x,y,z) = \frac{x^2y}{2} - x\sin(z) + \varphi(y,z), \tag{1}$$

dove $\varphi(y,z)$ è una funzione delle sole variabili y e z. Per determinare φ, e quindi F, deriviamo (1) rispetto a y:

$$F_y(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \varphi_y(y,z).$$

Poiché deve essere $F_y(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$ abbiamo che

$$\frac{x^2}{2} + \varphi_y(y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z},$$

da cui deduciamo $\varphi_y(y,z) = -\frac{e^y}{z}$, quindi $\varphi(y,z) = -\frac{e^y}{z} + \psi(z)$. Allora

$$F(x,y,z) = \frac{x^2y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + \psi(z). \tag{2}$$

Per determinare ψ, e quindi F, deriviamo (2) rispetto a z:

$$F_z(x,y,z) = -x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + \psi'(z).$$

Poiché deve essere $F_z(x,y,z) = \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)$ abbiamo che

$$-x\cos(z) + \frac{e^y}{z^2} + \psi'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x\cos(z),$$

da cui deduciamo $\psi'(z) = 0$, quindi $\psi(z) = c$, per $c \in \mathbb{R}$. Allora al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo tutte le primitive

$$F(x,y,z) = \frac{x^2y}{2} - x\sin(z) - \frac{e^y}{z} + c.$$

4) Trovare tutte le funzioni $g(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tali che la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = g(x,y,z)\,dx + z\,dy + y\,dz$$

sia esatta e calcolarne *tutte* le primitive.

$\mathbb{R}^3$ è stellato quindi la forma è esatta se e solo se è chiusa e le condizioni di chiusura sono verificate se

$$g_y(x,y,z) = 0, \quad g_z(x,y,z) = 0,$$

cioè se $g(x,y,z) = \tilde{g}(x)$ per una qualche funzione $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$.
Cerchiamo ora una primitiva $F(x,y,z)$ tale che

$$F_x(x,y,z) = \tilde{g}(x), \quad F_y(x,y,z) = z, \quad F_z(x,y,z) = y. \tag{3}$$

Integrando rispetto a y la seconda condizione abbiamo $F(x,y,z) = yz + \psi(x,z)$ e derivandola rispetto a z otteniamo $F_z(x,y,z) = y + \psi_z(x,z)$. Confrontando questa equazione con la terza in (3) risulta $\psi_z(x,z) = 0$, perciò $\psi(x,z) = \tilde{\psi}(x)$ e

$$F(x,y,z) = yz + \tilde{\psi}(x).$$

Infine derivando quest'ultima equazione rispetto a x e confrontando con la prima condizione in (3) otteniamo $\psi'(x) = \tilde{g}(x)$, per cui $\psi(x) = \int \tilde{g}(x)\,dx + c$, con $c \in \mathbb{R}$, e al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo tutte le primitive

$$F(x,y,z) = yz + \int \tilde{g}(x)\,dx + c.$$

6) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \neq 0\}$. Stabilire quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse, esatte in Ω e in caso affermativo calcolarne *tutte* le primitive:

$$\omega(x,y) = \frac{\cos(y)}{(x+y)^2}\,dx + \frac{\sin(x)}{(x+y)^2}\,dy$$

$$\tilde{\omega}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}\,dx - \frac{x}{(x+y)^2}\,dy$$

(Attenzione: Ω ha due componenti connesse...)

Si verifica facilmente che la forma ω non è chiusa, quindi non è esatta.

Invece $\tilde{\omega}$ risulta essere una forma chiusa e quindi, essendo Ω unione disgiunta di due componenti stellate ($\{x+y>0\}$ e $\{x+y<0\}$), la forma ω è anche esatta in Ω.
Ogni primitiva $F(x,y,z)$ deve soddisfare le seguenti condizioni

$$F_x(x,y,z) = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad F_y(x,y,z) = -\frac{x}{(x+y)^2}. \tag{4}$$

Integrando la prima equazione in x abbiamo $F(x,y,z) = -\frac{y}{x+y} + \varphi(y)$; poi derivando quest'ultima equazione rispetto a y e confrontando con la seconda condizione in (4) otteniamo $\phi'(y) = 0$, per cui

$$\phi(y) = \begin{cases} c_1 & \text{in } \{x+y>0\} \\ c_2 & \text{in } \{x+y<0\}, \end{cases}$$

c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Dunque

$$F(x,y,z) = \begin{cases} -\frac{y}{x+y} + c_1 & \text{in } \{x+y>0\} \\ -\frac{y}{x+y} + c_2 & \text{in } \{x+y<0\}. \end{cases}$$

7) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y+1}{x^2+(y-1)^2}\,dx + \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

calcolare $\int_{\gamma_R} \omega$ dove γ_R è la circonferenza di centro l'origine e raggio $R \neq 1$, percorsa una volta in senso antiorario.

La forma ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$. Se $0 < R < 1$, $\int_{\gamma_R} \omega = 0$ perché ω è esatta sull'aperto semplicemente connesso $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$.
Se $R > 1$ osserviamo che γ_R è omotopa alla circonferenza η di centro $(0,1)$ e raggio 1, percorsa una volta in verso antiorario:

$$\eta(t) = (\cos(t), 1 + \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pertanto

$$\int_{\gamma_R} \omega = \int_\eta \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

8) Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{ax+by}{x^2+y^2}\,dx + \frac{cx+dy}{x^2+y^2}\,dy \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

determinare per quali valori dei parametri la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e per quali valori è esatta. In corrispondenza di tali valori calcolare le primitive.

La forma differenziale è chiusa se per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{cx+dy}{x^2+y^2}\right)$$

cioè se

$$bx^2 + by^2 - 2axy - 2by^2 = cx^2 + cy^2 - 2cx^2 - 2dxy$$

cioè se

$$(b+c)(x^2-y^2) + 2(d-a)xy = 0.$$

Siccome la precedente equazione deve essere vera in $(0,1)$ si ottiene la condizione necessaria $b = -c$, di conseguenza si vede immediatamente che deve essere anche $d = a$ e che queste sono condizioni sufficienti per la chiusura di ω.

Invece, per quanto riguarda l'esattezza, useremo il risultato che ci dice che una forma differenziale è esatta se l'integrale della forma è nullo su ogni curva chiusa regolare a tratti. Poiché se consideriamo una curva chiusa che non gira intorno all'origine (unica singolarità della forma ω) l'integrale è nullo, ci basta verificare la condizione per curve che girano intorno all'origine. Ma allora grazie all'invarianza per omotopia basta verificare che sia nullo l'integrale di ω sulla circonferenza unitaria γ di centro l'origine, cioè che

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} [(a\cos(t)+b\sin(t))(-\sin(t))+(-b\cos(t)+a\sin(t))(\cos(t))]\,dt = -\int_0^{2\pi} b\,dt = -2\pi b,$$

da cui si ricava che la forma è esatta se e solo se $b = c = 0$ e $a = d \in \mathbb{R}$.

9) Mostrare che la forma

$$\omega(x,y) = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2+y^2} + \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

è chiusa. Determinare poi $\int_\gamma \omega$ per ognuna delle curve seguenti parametrizzate al variare di $t \in [0, 2\pi]$:

(a) $\gamma(t) = (\sin(t) - \cos(t), 1 + (t-\pi)^2)$,
(b) $\gamma(t) = (-1 + \cos(t), \sin(t))$,
(c) $\gamma(t) = (3 + 5\cos(t), \sin(t))$,
(d) $\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{2}), t^2 - 2\pi t + 2)$.

Per mostrare che la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ si può fare il conto oppure osservare che

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

dove $\omega_1 = \frac{y\,dx-(x+1)\,dy}{(x+1)^2+y^2}$ e $\omega_2 = \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$ sono traslate delle forme dell'esercizio precedente con $a = d = 0$ e $b = -c = 1$.

(a) la curva γ è chiusa e si trova nel semispazio $\{y \geq 1\}$, quindi in una regione dove ω è esatta, quindi $\int_\gamma \omega = 0$;

(b) γ è la circonferenza di raggio 1 e centro $(-1, 0)$, quindi ruota intorno alla singolarità della forma ω_1, mentre non ruota intorno al punto $(1, 0)$, singolarità della forma ω_2. Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \omega_1 = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t))\,dt = -2\pi;$$

(c) γ è un'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani, centrata in $(3, 0)$, che ruota una volta in senso antiorario intorno alle due singolarità della forma ω. Per l'invarianza per omotopia si ha che

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{\eta_1} \omega_1 \qquad\qquad \int_\gamma \omega_2 = \int_{\eta_2} \omega_2$$

dove η_1 è la circonferenza unitaria centrata in $(-1, 0)$, percorsa una volta in senso antiorario, e η_2 è la circonferenza unitaria centrata in $(1, 0)$, percorsa una volta in senso antiorario. Per cui

$$\int_\gamma \omega = \int_{\eta_1} \omega_1 + \int_{\eta_2} \omega_2 = \int_0^{2\pi} (-1)\,dt + \int_0^{2\pi} (-1)\,dt = -4\pi;$$

(d) γ è una curva che congiunge i punti $(1, 2)$ e $(-1, 2)$ e che non ruota intorno alle singolarità in quanto per $0 < t < 2\pi$ si ha $|\cos(\frac{t}{2})| < 1$. Quindi $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega$, dove η è il segmento $\eta(s) = (-s, 2)$, $s \in [-1, 1]$. E dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = \int_{-1}^{1} \left[\frac{-2}{(1-s)^2+4} + \frac{-2}{(1+s)^2+4}\right] ds = -\frac{\pi}{2}.$$