Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 6 – 19 novembre 2015

Esercizio 1: Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x+y)^2+y^2}\,dx + \frac{x}{(x+y)^2+y^2}\,dy$$

(a) stabilire se la forma è chiusa;

(b) calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ sulla ellisse γ, definita da $\gamma(t) = (\cos(t)-\sin(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$;

(c) calcolare l'integrale curvilineo $\int_\eta \omega$ sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine;

(d) stabilire se la forma è esatta.

Esercizio 2: Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega(x,y) = (-\cos(y)e^{x\cos(y)})\,dx + (x\sin(y)e^{x\cos(y)})\,dy$$

e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è definita come $\gamma(t) = (\cos(t\pi) + t^2, 1 + t^2)$

Esercizio 3: Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega(x,y) = e^x \sin(y)\,dx + (e^x\cos(y) + \arctan(x))\,dy$$

e γ è l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con primo estremo nel punto $(-1, 0)$ e secondo estremo nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 4: Stabilire se la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = (xy - \sin(z))\,dx + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right)dy + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos(z)\right)dz$$

è esatta nel semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ e in caso affermativo calcolarne le primitive.

Esercizio 5: Trovare tutte le funzioni $g(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tali che la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = g(x,y,z)\,dx + z\,dy + y\,dz$$

sia esatta e calcolarne *tutte* le primitive.

Esercizio 6: Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}$. Stabilire quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse, esatte in Ω e in caso affermativo calcolarne *tutte* le primitive:

$$\omega(x,y) = \frac{\cos(y)}{(x+y)^2}\,dx + \frac{\sin(x)}{(x+y)^2}\,dy$$

$$\tilde{\omega}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}\,dx - \frac{x}{(x+y)^2}\,dy$$

(Attenzione: Ω ha due componenti connesse...)

Esercizio 7: Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y+1}{x^2+(y-1)^2}\,dx + \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

calcolare $\int_{\gamma_R} \omega$ dove γ_R è la circonferenza di centro l'origine e raggio $R \neq 1$, percorsa una volta in senso antiorario.

Esercizio 8: Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{ax+by}{x^2+y^2}\,dx + \frac{cx+dy}{x^2+y^2}\,dy \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

determinare per quali valori dei parametri la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e per quali valori è esatta. In corrispondenza di tali valori calcolare le primitive.

Esercizio 9: Mostrare che la forma

$$\omega(x,y) = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2+y^2} + \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

è chiusa. Determinare poi $\int_\gamma \omega$ per ognuna delle curve seguenti parametrizzate al variare di $t \in [0, 2\pi]$:

(a) $\gamma(t) = (\sin(t) - \cos(t), 1 + (t-\pi)^2)$,

(b) $\gamma(t) = (-1 + \cos(t), \sin(t))$,

(c) $\gamma(t) = (3 + 5\cos(t), \sin(t))$,

(d) $\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{2}), t^2 - 2\pi t + 2)$.