Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 5 – 5 novembre 2015
Alcune soluzioni

5) Sia $f(x,y) = \int_x^y [3+\cos(t^2)]\,dt$. Determinare massimo e minimo assoluto di f nel quadrato $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

Q è compatto ed f è continua quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluto su Q. Inoltre per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\nabla f(x,y) = (-3-\cos(x^2), 3+\cos(y^2)),$$

da cui otteniamo che $\nabla f \neq (0,0)$ in Q (essendo $|\cos(t)| \leq 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}$), quindi f non ha punti critici interni a Q.
Ora studiamo il comportamento di f sul bordo di Q, che consta di 4 segmenti. Parametrizziamo i segmenti

$$\gamma_1(s) = (s,0), \quad \gamma_2(s) = (\pi,s), \quad \gamma_3(s) = (s,\pi), \quad \gamma_4(s) = (0,s),$$

e definiamo per $s \in [0,\pi]$:

$$\varphi_1(s) = f(\gamma_1(s)) = \int_s^0 [3+\cos(t^2)]\,dt, \quad \varphi_2(s) = f(\gamma_2(s)) = \int_\pi^s [3+\cos(t^2)]\,dt,$$

$$\varphi_3(s) = f(\gamma_3(s)) = \int_s^\pi [3+\cos(t^2)]\,dt, \quad \varphi_4(s) = f(\gamma_4(s)) = \int_0^s [3+\cos(t^2)]\,dt,$$

per cui per $s \in (0,\pi)$

$$\varphi_1'(s) = \varphi_3'(s) = -[3+\cos(s^2)] < 0, \quad \varphi_2'(s) = \varphi_4'(s) = [3+\cos(s^2)] > 0.$$

Dunque i punti di massimo e minimo assoluto di f sono da ricercarsi tra i punti non regolari del bordo di Q e cioè tra i 4 vertici del quadrato. Valutando la funzione nei punti $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi), (0,\pi)$ e osservando che l'integranda è una funzione positiva si vede che

$$\min_Q f = \int_\pi^0 [3+\cos(t^2)]\,dt, \qquad \max_Q f = \int_0^\pi [3+\cos(t^2)]\,dt.$$

In effetti si poteva pervenire direttamente a questa conclusione osservando che l'integranda è una funzione positiva perciò per trovare il massimo/minimo assoluto bastava massimizzare/minimizzare in Q "l'intervallo di integrazione" cioè la funzione $g(x,y) = y - x$!!!

6) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{|\underline{x}| \to +\infty} f(|\underline{x}|) = +\infty$. Provare che f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo $f(\underline{0}) \in \mathbb{R}$. Poiché $\lim_{|\underline{x}| \to +\infty} f(|\underline{x}|) = +\infty$ esiste $R > 0$ tale che

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{0}) + 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(\underline{0})}. \tag{1}$$

<u>I Modo:</u> In $\overline{B_R(\underline{0})}$, che è compatto, per il Teorema di Weierstrass f ammette un minimo assoluto e chiaramente per definizione di minimo vale, per qualche $\underline{x}_0 \in \overline{B_R(\underline{0})}$,

$$\min_{\overline{B_R(\underline{0})}} f = f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{0}). \tag{2}$$

In conclusione, usando (1) e (2)

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \inf\{\inf_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(\underline{0})}} f, \min_{\overline{B_R(\underline{0})}} f\} = \min_{\overline{B_R(\underline{0})}} f = f(\underline{x}_0)$$

e cioè l'estremo inferiore di f in $\mathbb{R}^2$ è assunto e quindi f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

II Modo: Sia $\{\underline{x}_k\}$ una successione minimizzante, cioè una successione tale che

$$f(\underline{x}_k) \to \inf_{\mathbb{R}^2} f \leq f(\underline{0}).$$

Allora $\underline{x}_k \in \overline{B_R(\underline{0})}$ per ogni k sufficientemente grande, altrimenti per (1) avremmo che $f(\underline{x}_k) \geq f(\underline{0}) + 1$.

Perciò $\{\underline{x}_k\}$ è una successione limitata e quindi per Bolzano -Weierstrass ammette una sottosuccessione convergente: $\underline{x}_{k_j} \to \underline{x}_0$. Ma allora, per la continuità di f, $f(\underline{x}_{k_j}) \to f(\underline{x}_0)$ e perciò $f(\underline{x}_0) = \inf_{\mathbb{R}^2} f$, e cioè l'estremo inferiore di f in $\mathbb{R}^2$ è assunto e quindi f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.

7) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = 2^8x^4 + y^4 - 4xy$ nella striscia $\mathbb{R} \times [-1,1]$.
(Suggerimento: per l'esistenza di massimo o minimo fatevi ispirare dall'Esercizio 6...)

Usando la stima $2xy \leq x^2 + y^2$ e il fatto che in $\mathbb{R} \times [-1,1]$ $y^2 \leq 1$ abbiamo che

$$f(x,y) \geq 2^8x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 \geq 2^8x^4 - 2x^2 - 2,$$

quindi

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ |y| \leq 1}} f(x,y) \geq \lim_{x \to +\infty} (2^8x^4 - 2x^2 - 2) = +\infty. \tag{3}$$

Quindi f non ammette massimo assoluto. Per quanto riguarda il minimo assoluto ragioniamo praticamente come nell'esercizio precedente: (3) implica che esiste $R > 0$ tale che

$$f(x,y) \geq f(0,0) + 1 \geq \inf_{\mathbb{R}\times[-1,1]} f + 1 \qquad \text{per ogni } (x,y) \in (\mathbb{R} \times [-1,1]) \setminus \overline{B_R(\underline{0})}.$$

Quindi

$$\inf_{\mathbb{R}\times[-1,1]} f = \inf\{\inf_{(\mathbb{R}\times[-1,1])\cap\overline{B_R(\underline{0})}} f, \inf_{(\mathbb{R}\times[-1,1])\setminus\overline{B_R(\underline{0})}} f\} = \inf_{(\mathbb{R}\times[-1,1])\cap\overline{B_R(\underline{0})}} f.$$

Essendo $(\mathbb{R} \times [-1,1]) \cap \overline{B_R(\underline{0})}$ compatto ed f continua, grazie al Teorema di Weierstrass, f ammette minimo assoluto in questo insieme quindi $\inf_{\mathbb{R}\times[-1,1]} f = \inf_{(\mathbb{R}\times[-1,1])\cap\overline{B_R(\underline{0})}} f = \min_{(\mathbb{R}\times[-1,1])\cap\overline{B_R(\underline{0})}} f = f(x_0,y_0)$, per qualche $(x_0,y_0) \in \mathbb{R} \times [-1,1] \cap \overline{B_R(\underline{0})}$, e cioè l'estremo inferiore di f in $\mathbb{R} \times [-1,1]$ è assunto e quindi f ammette minimo assoluto nella striscia.

Per determinare il minimo assoluto cerchiamo innanzitutto i punti critici interni alla striscia.

$$\nabla f(x,y) = (4(2^8x^3 - y), 4(y^3 - x)),$$

quindi i punti critici di f sono $(0,0), (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})$.
Occupiamoci ora del bordo della striscia, che è composto dalle rette $y = \pm 1$. Parametrizziamo le rette e calcoliamo f ristretta alle rette: definiamo cioè le funzioni

$$\varphi_1(x) = f(x,1) = 2^8x^4 - 4x + 1, \quad \varphi_2(x) = f(x,-1) = 2^8x^4 + 4x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Essendo $\varphi_1'(x) = 4(2^8x^3 - 1)$, $\varphi_1'(x) = 0$ se e solo se $x = 2^{-\frac{8}{3}}$, quindi il punto $(2^{-\frac{8}{3}}, 1)$ è un possibile punto di minimo assoluto. Analogamente, essendo $\varphi_2'(x) = 4(2^8x^3 + 1)$, $\varphi_2'(x) = 0$ se e solo se $x = -2^{-\frac{8}{3}}$, quindi il punto $(-2^{-\frac{8}{3}}, -1)$ è un possibile punto di minimo assoluto.

Ora non resta che valutare f nei punti $(0,0), (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}), (2^{-\frac{8}{3}}, 1), (-2^{-\frac{8}{3}}, -1)$ e determinare il minimo assoluto. Siccome

$$f(0,0) = 0, \quad f(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}, \quad f(2^{-\frac{8}{3}}, 1) = f(-2^{-\frac{8}{3}}, -1) = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}} + 1 > 0$$

il minimo assoluto è $-\frac{1}{8}$.

8) Stabilire se la funzione $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ ammette minimo assoluto nel primo quadrante $(x, y > 0)$ e in caso affermativo determinarlo.
(Suggerimento: fatevi ispirare dall'Esercizio 6...)

Chiamiamo IQ il primo quadrante, cioè $IQ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Si vede immediatamente che

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to+\infty \\ x,y>0}} f(x,y) = +\infty,$$

perciò esiste $R > 0$ tale che

$$f(x,y) \geq f(1,1) + 1 \geq \inf_{IQ} f + 1 \quad \text{per ogni } (x,y) \in IQ \setminus \overline{B_R(\underline{0})}. \tag{4}$$

(Chiaramente invece di $(1,1)$ avremmo potuto scegliere un qualsiasi punto $(a,b) \in IQ$!!!)
Inoltre per ogni $x_0 > 0$ e per ogni $y_0 > 0$

$$\lim_{y\to0^+} f(x_0,y) = \lim_{x\to0^+} f(x,y_0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to0 \\ x,y>0}} f(x,y) = +\infty,$$

quindi esiste un intorno aperto V degli assi tale che

$$f(x,y) \geq f(1,1) + 1 \geq \inf_{IQ} f + 1 \quad \text{per ogni } (x,y) \in IQ \cap V. \tag{5}$$

Ora, usando (4) e (5), possiamo scrivere

$$\inf_{IQ} f = \min\{\inf_{(IQ\setminus\overline{B_R(0)})\cup(IQ\cap V)} f, \inf_{(IQ\cap\overline{B_R(0)})\setminus V} f\} = \inf_{(IQ\cap\overline{B_R(0)})\setminus V} f,$$

ma $(IQ \cap \overline{B_R(0)}) \setminus V$ è compatto quindi (essendo f continua) per il Teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto in $(IQ \cap \overline{B_R(0)}) \setminus V$. In definitiva

$$\inf_{IQ} f = \min_{(IQ\cap\overline{B_R(0)})\setminus V} = f(x_0,y_0),$$

per qualche $(x_0,y_0) \in (IQ \cap \overline{B_R(0)}) \setminus V$, e cioè l'estremo inferiore di f in IQ è assunto e quindi f ammette minimo assoluto nel primo quadrante.
Per determinarlo calcoliamo il gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = (1 - \frac{1}{x^2y}, 8 - \frac{1}{xy^2}),$$

e risolvendo $\nabla f = \underline{0}$ ricaviamo che l'unico punto critico di f in IQ è $(2,4)$, perciò il minimo assoluto di f in IQ è $f(2,4) = \frac{272}{8}$.

9) Siano $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ due curve regolari disgiunte. Dimostrare che se s_0, $t_0 \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\text{dist}(\gamma_1(s_0), \gamma_2(t_0)) = \min_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} \text{dist}(\gamma_1(s), \gamma_2(t)),$$

dove dist denota la distanza euclidea, allora i vettori $\gamma_1'(s_0)$ e $\gamma_2'(t_0)$ sono paralleli.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(s,t) = \|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)\|^2,$$

definita come il quadrato della distanza tra $\gamma_1(s)$ e $\gamma_2(t)$. Poiché (s_0,t_0) per ipotesi è un punto di minimo per f, allora $\nabla f(s_0,t_0) = (0,0)$, cioè

$$0 = f_s(s_0,t_0) = 2(\gamma_1(s_0) - \gamma_2(t_0)) \cdot \gamma_1'(s_0),$$

$$0 = f_t(s_0,t_0) = 2(\gamma_1(s_0) - \gamma_2(t_0)) \cdot (-\gamma_2'(t_0)).$$

Quindi, essendo per ipotesi $(\boldsymbol{\gamma}_1(s_0) - \boldsymbol{\gamma}_2(t_0)) \neq \underline{0}$, $\boldsymbol{\gamma}_1'(s_0) \neq \underline{0}$ e $\boldsymbol{\gamma}_2'(t_0) \neq \underline{0}$, abbiamo che

$$\boldsymbol{\gamma}_1'(s_0) \perp (\boldsymbol{\gamma}_1(s_0) - \boldsymbol{\gamma}_2(t_0)), \qquad \boldsymbol{\gamma}_2'(t_0) \perp (\boldsymbol{\gamma}_1(s_0) - \boldsymbol{\gamma}_2(t_0)),$$

da cui possiamo concludere, dato che si tratta di vettori di $\mathbb{R}^2$, che $\boldsymbol{\gamma}_1'(s_0) \parallel \boldsymbol{\gamma}_2(t_0)$.

Esercizi di ripasso

10) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{|xy|}-1)^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$.

f in $(0,0)$ è continua per $\alpha > 1$, derivabile per $\alpha > 0$ e differenziabile per $\alpha > \frac{3}{2}$.

11) Data la funzione $f(x,y) = |y| \cos(x^2+y^2)$, stabilire in quali punti di $\mathbb{R}^2$:

(a) è continua,
(b) ammette derivate parziali,
(c) è differenziabile.

(a) Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
(b) per ogni $(x,y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}, 0), (-\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}, 0)\}$,
(c) per ogni $(x,y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}, 0), (-\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}, 0)\}$.