Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 1 – 1 ottobre 2015

Esercizio 1: Determinare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili e rappresentarlo graficamente:

$$f(x,y) = \log(1-|x|-|y|), \qquad g(x,y) = \sqrt{y^2-x^4}, \qquad h(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}.$$

Esercizio 2: Stabilire se le seguenti funzioni sono continue, differenziabili e di classe C^1 nel loro dominio e calcolarne il piano tangente nel punto $(1,0)$:

$$f(x,y) = (\tan(x-y))\sqrt{(x-y)^2+y^2},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 3: Studiare la continuità della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4: Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(\frac{y}{x})\frac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$,

(b) calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$.

Esercizio 5: Studiare al variare del parametro reale positivo α, continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine delle funzioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x) + |x|^\alpha \frac{\log(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 6: Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità nel suo dominio al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$.

Esercizio 7: Dimostrare che sono definite e differenziabili le funzioni

$$F(x,y) = \int_x^{3y} \frac{e^t-1}{t}dt, \qquad G(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}dt$$

e calcolare le derivate direzionali di F in $(1,1)$.

Esercizio 8: Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : D \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è continua in D se e solo se per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$ risulta che $f^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 9: Dimostrare che ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso per poligonali è connesso.