Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 5 – 5 novembre 2015

Esercizio 1: Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(x, y) = 2x + y$ sulla curva del piano $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Esercizio 2: Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(x, y, z) = x^2 - z$ su $D = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3: Determinare, se esiste, il punto della retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione delle superfici

$$x + y + z = 0, \qquad x + 2y - z = 0$$

che ha distanza minima dal punto $(1, 1, 1)$.

Esercizio 4: Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 3x^2 + 4y^2 \leq 4,\ y \geq \frac{1}{2}\}$.

Esercizio 5: Sia $f(x, y) = \int_x^y [3 + \cos(t^2)]\, dt$. Determinare massimo e minimo assoluto di f nel quadrato $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Esercizio 6: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim\limits_{|\underline{x}| \to +\infty} f(|\underline{x}|) = +\infty$. Provare che f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 7: Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(x, y) = 2^8x^4 + y^4 - 4xy$ nella striscia $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.
(Suggerimento: per l'esistenza di massimo o minimo fatevi ispirare dall'Esercizio 6...)

Esercizio 8: Stabilire se la funzione $f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ ammette minimo assoluto nel primo quadrante $(x, y > 0)$ e in caso affermativo determinarlo.
(Suggerimento: fatevi ispirare dall'Esercizio 6...)

Esercizio 9: Siano $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ due curve regolari disgiunte. Dimostrare che se $s_0,\ t_0 \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\mathrm{dist}(\gamma_1(s_0), \gamma_2(t_0)) = \min_{(s,t) \in \mathbb{R}^2} \mathrm{dist}(\gamma_1(s), \gamma_2(t)),$$

dove dist denota la distanza euclidea, allora i vettori $\gamma_1'(s_0)$ e $\gamma_2'(t_0)$ sono paralleli.

Esercizi di ripasso

Esercizio 10: Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^{|xy|} - 1)^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

Esercizio 11: Data la funzione $f(x, y) = |y| \cos(x^2 + y^2)$, stabilire in quali punti di $\mathbb{R}^2$:

(a) è continua,

(b) ammette derivate parziali,

(c) è differenziabile.