Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 4 – 29 ottobre 2015

Esercizio 1: Calcolare $\int_\gamma f$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

(b) $f(x,y,z) = x + z$, $\gamma(t) = (t, \frac{3}{\sqrt{2}}t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$;

(c) $f(x,y) = xy$, il sostegno di γ è la parte di ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ contenuta nel primo quadrante.

Esercizio 2: Disegnare il grafico delle seguenti curve, stabilendo se si tratta di curve regolari, semplici o rettificabili:

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (1 + \cos(t), \sin(t)); \qquad \gamma_2 : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (\sin^2(t), \cos^2(t));$$

$$\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (t^3, \cos(t)).$$

Infine calcolare la lunghezza di γ_2.

Esercizio 3: Considerare la curva $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}e^t, e^t \cos(t), e^t \sin(t)),$$

determinare l'ascissa curvilinea calcolata a partire dal punto corrispondente al valore $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva rispetto all'ascissa curvilinea. Calcolare la lunghezza di γ.

Esercizio 4: Verificare che l'equazione $\frac{x^2}{2} + xy - \log(1 + x^2 + y^2) + y = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Determinare il comportamento della funzione g in un intorno di 0 (cioè stabilire se g è crescente o decrescente o ammette massimo locale o minimo locale in 0...).

Esercizio 5: Data la funzione $f(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3e^x - 3$, verificare che in un intorno di $(0,0)$ l'insieme dei punti del piano tali che $f(x,y) = 0$ può essere definito esplicitamente nella forma $y = g(x)$. Calcolare inoltre

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x^2}.$$

Esercizio 6: Verificare che l'equazione $2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$ in un intorno di $(1,0,0)$. Scrivere l'equazione del piano tangente in $(1,0,0)$ alla superficie di equazione $z = g(x,y)$.

Esercizio 7: Verificare che il sistema

$$\begin{cases} x + \log(y) + z = 2 \\ 2x - y^2 + z = 1 \end{cases}$$

definisce implicitamente, per x in un intorno di 0, due funzioni $y = g(x)$ e $z = h(x)$ tali che $g(0) = 1$ e $h(0) = 2$. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 delle funzioni g e h nel punto $x_0 = 0$.

Esercizio 8: Dato il sistema

$$\begin{cases} (x+3)s - \tan(s+t) + 2x = 0 \\ \sin(s+t) + 3y - x(t+3) = 0 \end{cases}$$

verificare che $(x_0, y_0, s_0, t_0) = (0,0,0,0)$ è una soluzione e che il sistema definisce implicitamente due funzioni $s = u(x,y)$ e $t = v(x,y)$ per (x,y) in un intorno di $(0,0)$.
Infine calcolare le derivate parziali di u e v del primo ordine in 0.

Esercizio 9: Considerare la funzione

$$f(x,y) = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4$$

e determinare l'immagine di f, i valori regolari di f e i valori singolari di f.