**Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 3 – 22 ottobre 2015**
**Alcune soluzioni**

**2)** Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$g(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

Determinare inoltre $\inf_{\mathbb{R}^2} g$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} g$ e stabilire, in conclusione, se $g$ ammette punti di minimo/massimo assoluto.

La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque gli eventuali punti di estremo locale si devono cercare tra i punti critici di $g$. Si ha

$$g_x(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3, \quad g_y(x,y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2,$$

quindi per trovare i punti critici si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2y^2(3-4x-3y) = 0 \\ x^3y(2-2x-3y) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha che i punti critici di $g$ sono:

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \quad (x_0, 0) \quad \text{e} \quad (0, y_0) \quad \text{con } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la natura dei punti critici calcoliamo la matrice Hessiana nei punti suddetti. Essendo

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix},$$

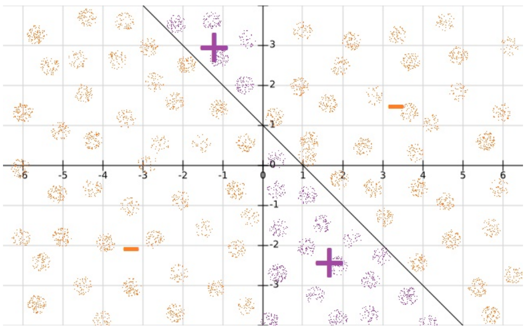
si ha che

$$H_g(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_0^3 - 2x_0^4 \end{pmatrix},$$

quindi $\det(H_g(x_0,0)) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Il test della matrice Hessiana è perciò inefficace e per determinare la natura di questi punti occorre studiare il comportamento di $g$ intorno all'asse delle ascisse. Osserviamo che $g(x_0, 0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, quindi lo studio del segno può fornirci delle informazioni sufficienti per concludere. Essendo

$$g(x,y) = x^3y^2(1-x-y),$$

si ottiene facilmente che $g$ è positiva nella regione evidenziata in viola, mentre è negativa nella regione evidenziata in arancione.




Da ciò si deduce che i punti $(x_0, 0)$ sono di massimo locale se $x_0 > 1$ o $x_0 < 0$ (visto che è sempre possibile trovare un intorno di questi punti in cui $g$ è non positiva). Allo stesso modo si vede che se $0 < x_0 < 1$ i punti $(x_0, 0)$ sono di minimo locale (visto che è sempre possibile trovare un intorno di questi punti in cui $g$ è non negativa). Invece i punti $(0, y_0)$ e $(1, 0)$ sono punti di sella (visto che in ogni loro intorno ci sono sia punti in cui $g$ è positiva che punti in cui $g$ è negativa).

Infine per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ abbiamo che

$$H_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

dunque, essendo $g_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) < 0$ e $\det(H_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})) > 0$, si ha che il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ è di massimo locale.

Infine, osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x,1) = \lim_{x\to+\infty}(-x^4) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to-\infty} g(1,y) = \lim_{y\to-\infty}(-y^3) = +\infty,$$

concludiamo che $\inf_{\mathbb{R}^2} g = -\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} g = +\infty$.

**3)** Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$h(x,y) = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Determinare inoltre $\inf_{\mathbb{R}^2} h$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} h$ e stabilire, in conclusione, se $h$ ammette punti di minimo/massimo assoluto.

La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque gli eventuali punti di estremo locale si devono cercare tra i punti critici di $h$. Si ha

$$h_x(x,y) = \frac{2x(y-1)^2}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad h_y(x,y) = \frac{2(x^2 - y^2 - x^2y + 1)}{(x^2+y^2+1)^2},$$

quindi per trovare i punti critici si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x(y-1)^2 = 0 \\ x^2 - y^2 - x^2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha che i punti critici di $h$ sono:

$$(0,-1) \quad \text{e} \quad (x_0, 1) \text{con } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la natura dei punti critici calcoliamo la matrice Hessiana nei punti suddetti. Essendo

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(y-1)^2(-3x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{4x(y-1)(x^2-y^2+2y+1)}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \frac{4x(y-1)(x^2-y^2+2y+1)}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{x^4+x^2+5x^2y^2-6x^2y-6y+2y^3}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix},$$

si ha che

$$H_h(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

che è una matrice definita positiva, per cui $(0,-1)$ risulta essere un punto di minimo locale.

Invece per $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$H_h(x_0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_0^2-2}{(x_0^2+2)^2} \end{pmatrix},$$

e quindi, essendo $\det(H_h(x_0,1)) = 0$, il test della matrice Hessiana risulta inefficace. Per determinare la natura di questi punti occorre studiare, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, il segno di $h(x,y) - h(x_0,1)$ intorno a $(x_0,1)$. Si vede facilmente che in realtà

$$h(x,y) - h(x_0,1) = \frac{x^2+2y}{x^2+y^2+1} - 1 = -\frac{(y-1)^2}{x^2+y^2+1} \le 0$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per cui i punti del tipo $(x_0, 1)$ sono punti di massimo assoluto e $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} h = \max\limits_{\mathbb{R}^2} h = 1$.
Abbiamo inoltre che $(0,-1)$ è un punto di minimo assoluto, e quindi che $-1 = h(0,-1) = \min\limits_{\mathbb{R}^2} h = \inf\limits_{\mathbb{R}^2} h$, in quanto:

$$h(x,y) - (-1) = \frac{2x^2 + (y+1)^2}{x^2+y^2+1} \geq 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**4)** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. Dimostrare che non può essere $\lim\limits_{|\underline{x}|\to+\infty} f(\underline{x}) = -\infty$.

Supponiamo per assurdo che $\lim\limits_{|\underline{x}|\to+\infty} f(\underline{x}) = -\infty$, allora in particolare

$$\lim_{x_1\to+\infty} f(\pm x_1, 0, \ldots, 0) = -\infty. \qquad (*)$$

D'altronde per definizione di funzione convessa abbiamo che per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in [0,1]$

$$f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) \leq t f(\underline{x}) + (1-t) f(\underline{y}),$$

quindi in particolare prendendo $\underline{x} = (x_1, 0, \ldots, 0)$, $\underline{y} = (-x_1, 0, \ldots, 0)$ e $t = \frac{1}{2}$ otteniamo che

$$f(\underline{0}) \leq \frac{1}{2}(f(x_1, 0, \ldots, 0) + f(-x_1, 0, \ldots, 0)). \qquad (*)$$

Ma $(*)$ implica che $\frac{1}{2}(f(x_1,0,\ldots,0) + f(-x_1,0,\ldots,0)) \to -\infty$ per $x_1 \to -\infty$ e quindi otteniamo una contraddizione con $(*)$.

**5)** Sia $F(x) = \int_0^1 \ln(2 - x^2t^2)dt$. Dimostrare che $F$ è concava nell'intervallo $(-1,1)$.

Essendo $f(x,t) = \ln(2-x^2t^2)$ una funzione di classe $C^\infty$ in $(-1,1)\times(0,1)$, possiamo calcolare $F'$ e $F''$ derivando sotto il segno di integrale:

$$F'(x) = -2x \int_0^1 \frac{t^2}{2 - x^2t^2} dt,$$

$$F''(x) = -2 \int_0^1 \frac{t^2}{2 - x^2t^2} dt - 4x^2 \int_0^1 \frac{t^4}{(2 - x^2t^2)} dt.$$

Si vede facilmente che $F''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (-1,1)$ e questo prova che $F$ è concava in tale intervallo.

**8)** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$. Dimostrare che $f$ non può essere iniettiva. (*Suggerimento: considerare la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x,y) = (f(x,y), y)$ e applicare il teorema della funzione inversa a $F$ o, più direttamente, applicare il teorema della funzione implicita a $f$*)

<u>I MODO</u> (usando il Teorema della funzione inversa): Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x,y) = (f(x,y), y)$ e calcoliamone la matrice Jacobiana:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $\det(J_F(x,y)) = f_x(x,y)$. Se fosse $\det(J_F(x,y)) = f_x(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ allora avremmo che $f(x_1, y) = f(x_2, y)$ per ogni $x_1$, $x_2$, $y \in \mathbb{R}$ e quindi $f$ non sarebbe iniettiva. Se invece esistesse un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\det(J_F(x_0,y_0)) = f_x(x_0,y_0) \neq 0$, allora per il Teorema della funzione inversa esisterebbero un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$, un intorno $V$ di $F(x_0, y_0)$ e una funzione $G : V \to U$ tali che $F \circ G = \mathrm{Id}_{|V}$, cioè che:

$$F \circ G(x, y) = (f(G_1(x, y), G_2(x, y)), G_2(x, y)) = (x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in V.$$

In particolare si avrebbe

$$f(G_1(x, y), y) = x \quad \text{per ogni } (x, y) \in V$$

e da questa identità sarebbe chiaro che $f$ non può essere iniettiva: infatti tenendo $x$ costante e facendo variare $y$ si troverebbero punti distinti in cui il valore di $f$ è uguale.

<u>II MODO</u> (usando il Teorema della funzione implicita): Se fosse $f_x(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ allora $f(x_1, y) = f(x_2, y)$ per ogni $x_1$, $x_2$ e quindi $f$ non sarebbe iniettiva. Se invece esistesse un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f_y(x, y) \neq 0$, la funzione

$$\tilde{f}(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

verificherebbe $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ e $\tilde{f}_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora per il Teorema della funzione implicita, applicato a $\tilde{f}$, esisterebbe una funzione $g$ di classe $C^1$ definita in un intorno $X$ di $x_0$ tale che

$$y = g(x) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(x, g(x)) = 0 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Riscrivendo la precedente identità in termini di $f$ avremmo che

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) \quad \text{per ogni } x \in X,$$

e sarebbe quindi chiaro che $f$ non può essere iniettiva, infatti facendo variare $x$ in $X$ troveremmo punti distinti in cui il valore di $f$ è uguale.