Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 3 – 22 ottobre 2015

Esercizio 1: Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy^2.$$

Determinare inoltre $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e stabilire, in conclusione, se f ammette punti di minimo/massimo assoluto.

Esercizio 2: Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$g(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

Determinare inoltre $\inf_{\mathbb{R}^2} g$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} g$ e stabilire, in conclusione, se g ammette punti di minimo/massimo assoluto.

Esercizio 3: Determinare gli eventuali punti di estremo locale della funzione

$$h(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Determinare inoltre $\inf_{\mathbb{R}^2} h$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} h$ e stabilire, in conclusione, se h ammette punti di minimo/massimo assoluto.

Esercizio 4: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa. Dimostrare che non può essere $\lim_{|\underline{x}|\to+\infty} f(\underline{x}) = -\infty$.

Esercizio 5: Sia $F(x) = \int_0^1 \ln(2 - x^2t^2)dt$. Dimostrare che F è concava nell'intervallo $(-1, 1)$.

Esercizio 6: Sia $G(x, y) = \int_y^{y-x} e^{(t+x)^2}dt$. Calcolare $\nabla G(x, y)$ e determinare eventuali punti critici di G.

Esercizio 7: Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

(a) Calcolare la matrice Jacobiana di F e determinare in quali punti F è localmente invertibile.

(b) Sia $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$. Rappresentare nel piano cartesiano $F(C_r)$, cioè l'immagine di C_r tramite F.

(c) Determinare $F(\mathbb{R}^2)$, cioè l'immagine della funzione F.

Esercizio 8: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Dimostrare che f non può essere iniettiva. (*Suggerimento: considerare la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $F(x, y) = (f(x, y), y)$ *e applicare il teorema della funzione inversa o, più direttamente, applicare il teorema della funzione implicita a* f)

Esercizio 9: (a) Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le coordinate cartesiane e siano $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ le corrispondenti coordinate polari, cioè $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$.
Verificare che, se $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e $f(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin(\theta))$, si ha per $\rho > 0$:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\rho, \theta).$$

(b) Siano $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le coordinate cartesiane e siano $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$ le corrispondenti coordinate cilindriche, cioè $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ e $z = z$.
Verificare che, se $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, e $f(\rho, \theta, z) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin(\theta), z)$, si ha per $\rho > 0$:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\rho, \theta, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\rho, \theta, z).$$