3.4 Funzioni omogenee

Definizione 3.4.1. L'insieme $C \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *cono* se $x \in C \Rightarrow tx \in C \ \forall\, t > 0$.

Definizione 3.4.2. La funzione $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita sul cono C si dice *omogenea di grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x) \ \forall\, t > 0, \forall\, x \in C$.

È necessario che f sia definita su un cono per garantire il fatto che $f(tx)$ sia ben definito.

I polinomi omogenei di grado n sono (banalmente) funzioni omogenee di grado n. Le forme quadratiche sono funzioni omogenee di grado due. Una funzione è omogenea di grado zero se e solo se è costante sulle semirette che passano per l'origine; in particolare, le funzioni in due variabili che dipendono solo dal rapporto $\frac{x}{y}$ oppure $\frac{y}{x}$ sono omogenee di grado zero.

Teorema 3.4.1 (di Eulero). *Sia $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile sul cono aperto C; allora f è omogenea di grado α se, e solo se, vale l'*identità di Eulero

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x) \quad \forall\, x \in C.$$

Dimostrazione (facoltativa). Consideriamo la funzione $F(t) = \dfrac{f(tx)}{t^\alpha}$ definita $\forall\, t > 0$. Allora f è omogenea di grado α se e solo se F è costante; infatti, se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ $\forall\, t > 0$ e $\forall\, x \in C$, allora $F(t) = F(1)\ \forall\, t > 0$, e viceversa.

Dato che f è differenziabile, F è derivabile; se è costante, deve valere $F'(t) = 0$ $\forall t > 0$. Quindi, utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo che

$$\begin{aligned} 0 = F'(t) &= \frac{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot \frac{\partial (tx_i)}{\partial t}\right] \cdot t^\alpha - f(tx) \cdot \alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \left[t \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i \right) - \alpha f(tx) \right] \end{aligned}$$

e quindi, per $t = 1$,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i \right) - \alpha f(x) = \langle \nabla f(x), x \rangle - \alpha f(x) = 0$$

che corrisponde alla formula di Eulero.

Se viceversa vale quest'ultima identità, risalendo le uguaglianze al contrario otteniamo che $F'(t) = 0\ \forall t > 0$ e quindi che F è costante, il che equivale a dire che f è omogenea di grado α. □

È facile intuire che vale la seguente

Proposizione 3.4.1. *Sia $f : C \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile sul cono aperto C e omogenea di grado α; allora, le funzioni $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sono omogenee di grado $\alpha - 1\ \forall\, i = 1, \ldots, N$.*

3.5 Funzioni convesse

Sia f una funzione a valori reali definita in un insieme convesso $K \subseteq \mathbb{R}^N$ [1].

Definizione 3.5.1. La funzione f si dice *convessa* su K se, $\forall\, x'$, $x'' \in K$ e $\forall\, t \in [0,1]$ si ha

$$f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x''). \tag{3.1}$$

Se in (3.1) vale la disuguaglianza stretta ogniqualvolta $x' \neq x''$ e $t \in (0,1)$ allora f si dice *strettamente convessa* su K.

Per capire il significato geometrico di (3.1), indichiamo con $K^+ \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ il *sopragrafico* di f, ovvero l'insieme

$$K^+ = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{N+1}) = (x, x_{N+1}) : x \in K, f(x) \leq x_{N+1}\}.$$

Vale la seguente

Proposizione 3.5.1. *La funzione f è convessa su K se, e solo se, il sopragrafico K^+ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $P' = (x', x'_{N+1})$ e $P'' = (x'', x''_{N+1})$ due punti distinti in K^+. Il segmento congiungente P' e P'' ha equazioni

$$\begin{cases} x = tx' + (1-t)x'' \\ x_{N+1} = tx'_{N+1} + (1-t)x''_{N+1} \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$

Poiché $f(x') \leq x'_{N+1}$ e $f(x'') \leq x''_{N+1}$ si ha

$$f(x) \leq tf(x') + (1-t)f(x'') \leq tx'_{N+1} + (1-t)x''_{N+1} = x_{N+1}$$

cioè K^+ è convesso.

Viceversa[2], se K^+ è convesso e f non è convessa, esisterebbero due punti x', $x'' \in K$ e $\bar{t} \in [0,1]$ tali che

$$f(\bar{t}x' + (1-\bar{t})x'') > \bar{t}f(x') + (1-\bar{t})f(x''). \tag{3.2}$$

D'altra parte i punti $(x', f(x'))$ e $(x'', f(x''))$ appartengono a K^+ e quindi anche il punto

$$(\bar{t}x' + (1-\bar{t})x'', \bar{t}f(x') + (1-\bar{t})f(x''))$$

appartiene a K^+ (poiché K^+ è convesso per ipotesi); dunque risulta

$$f(\bar{t}x' + (1-\bar{t})x'') \leq \bar{t}f(x') + (1-\bar{t})f(x'')$$

in contraddizione con la (3.2). □

Consideriamo ora il *sottolivello* di f, ovvero l'insieme

$$K_c = \{x \in K : f(x) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 3.5.2. *Se f è convessa su K, allora il sottolivello K_c è convesso.*

[1] Questo paragrafo è la trascrizione degli appunti forniti dalla professoressa Pacella a lezione.
[2] Questa parte della dimostrazione è facoltativa.

Dimostrazione. Se $x', x'' \in K_c$, si ha

$$f(tx' + (1-t)x'') \le tf(x') + (1-t)f(x'') \le tc + (1-t)c = c \quad \forall t \in [0,1]$$

cioè K_c è convesso. □

La **Proposizione 3.5.2** non si può invertire come si vede facilmente considerando la funzione $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.5.1. La funzione $f(x) = \|x - \overline{x}\|$, dove $\overline{x}$ è un punto fissato in $\mathbb{R}^N$, è una funzione convessa. Più in generale la funzione $f(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, è una funzione convessa su $\mathbb{R}^N$ se, e solo se, A è convesso e chiuso.

Infatti se f è convessa su $\mathbb{R}^N$, l'insieme $K_0 = A$ è convesso per la **Proposizione 3.5.2** ($c = 0$).

Viceversa, supponiamo A convesso e osserviamo che, poiché A è chiuso, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $g(y) = \|x - y\|$, $y \in A$, assume il minimo in A (g è continua); di conseguenza, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^N$ esiste $\overline{y} \in A$ tale che $f(\overline{x}) = \min\{\|x - y\|, y \in A\} = \|x - \overline{y}\|$. Siano $x', x'' \in \mathbb{R}^N$ e $y', y'' \in A$ i punti che realizzano la minima distanza di x' e x'' da A. Consideriamo i punti

$$x = tx' + (1-t)x'', \quad y = ty' + (1-t)y'', \quad t \in [0,1]$$

e notiamo che $y \in A$ (poiché A è convesso) e $f(x) \le \|x - y\|$ per definizione. Si ha allora

$$\begin{aligned} f(x) &= f(tx' + (1-t)x'') \le \|x - y\| = \|t(x' - y') + (1-t)(x'' - y'')\| \le \\ &\le t\|x' - y'\| + (1-t)\|x'' - y''\| = tf(x') + (1-t)f(x''). \end{aligned}$$

Teorema 3.5.1. *Sia K un insieme aperto e convesso e f convessa su K. Allora f è continua su K.*

Dimostrazione (facoltativa). Sia $\overline{x}$ un punto fissato in K e d la distanza di $\overline{x}$ dalla frontiera di K ($d = +\infty$ se $K = \mathbb{R}^N$). Sia C il cubo N-dimensionale con centro in $\overline{x}$ e lato 2δ, $\delta < d \cdot N^{-\frac{1}{2}}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x_i - \overline{x}_i\| \le \delta, i = 1, \ldots, N\}$. Detto V l'insieme dei vertici di C, cioè $V = \{y \in \mathbb{R}^N : \|y_i - \overline{x}_i\| = \delta\}$, definiamo $M = \max_{x \in V} f(x)$.

Per la **Proposizione 3.5.2** l'insieme $K_M = \{x : f(x) \le M\}$ è convesso e poiché, com'è facile verificare, C è il più piccolo insieme convesso contenente i vertici di C, si ha che $C \subseteq K_M$.

Indicata con B_δ la sfera di centro $\overline{x}$ e raggio δ, sia x un qualsiasi punto di B_δ e x' e x'' i due punti in cui la retta passante per x e $\overline{x}$ incontra la frontiera di B_δ. Posto $t = \dfrac{\|x - \overline{x}\|}{\delta}$ si ha

$$x = tx' + (1-t)\overline{x} \quad \text{e} \quad \overline{x} = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}x''$$

poiché x appartiene al segmento che congiunge x' e $\overline{x}$ e $\overline{x}$ appartiene al segmento che congiunge x e x''.

Poiché f è convessa si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(tx' + (1-t)\overline{x}) \le tf(x') + (1-t)f(\overline{x}) \le tM + (1-t)f(\overline{x}) \\ f(\overline{x}) &= f\left(\frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}x''\right) \le \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x'') \le \frac{f(x) + tM}{1+t} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$f(x) - f(\overline{x}) \le t(M - f(\overline{x})) \quad \text{e} \quad f(\overline{x}) - f(x) \le t(M - f(\overline{x}))$$

cioè

$$|f(x) - f(\overline{x})| \leq \frac{\|x - \overline{x}\|}{\delta} \cdot (M - f(\overline{x}))$$

e quest'ultima disuguaglianza implica che f è continua in $\overline{x}$. □

Esempio 3.5.2. Il teorema precedente non è vero se K non è aperto. Infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1] \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è convessa, ma discontinua in $x = 0$.

Proposizione 3.5.3. *Sia f differenziabile su un insieme convesso K. Allora:*

1. *f è convessa su K se, e solo se,*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle = f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(x - \overline{x}) \tag{3.3}$$

$\forall\, x, \overline{x} \in K$;

2. *f è strettamente convessa su K se, e solo se,*

$$f(x) > f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle = f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(x - \overline{x}) \tag{3.4}$$

$\forall\, x, \overline{x} \in K$ con $x \neq \overline{x}$.

Dimostrazione (non per l'esame). Supponiamo che f sia convessa su K e siano x, $\overline{x}$ due punti di K. Denotando con h la differenza $x - \overline{x}$, per la convessità di f si ha

$$f(\overline{x} + th) \leq t f(\overline{x} + h) + (1 - t) f(\overline{x})$$

e quindi

$$f(\overline{x} + th) - f(\overline{x}) \leq t[f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})]. \tag{3.5}$$

Sottraendo $t\,\mathrm{d}f(\overline{x})(h) = \mathrm{d}f(\overline{x})(th)$ ad entrambi i membri e dividendo per t si ottiene

$$\frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x}) - t\,\mathrm{d}f(\overline{x})(h)}{t} \leq f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) - \mathrm{d}f(\overline{x})(h).$$

Poiché f è differenziabile il primo membro tende a zero per $t \to 0^+$ e quindi la (3.3) sussiste.

Viceversa, supponiamo vera la (3.3) e siano x', x'' due punti distinti di K e $t \in (0, 1)$. Ponendo

$$\overline{x} = tx' + (1 - t)x'', \quad h = x' - \overline{x},$$

si ottiene

$$x'' = \overline{x} - \frac{t}{1 - t} h.$$

Dalla (3.3) discende

$$f(x') \geq f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(h) \quad \text{e} \quad f(x'') \geq f(\overline{x}) \left(-\frac{t}{1 - t} h \right).$$

Moltiplicando entrambi i membri della prima disuguaglianza per $\dfrac{t}{1-t}$ e sommando si ottiene

$$\frac{t}{1 - t} f(x') + f(x'') \geq \left(\frac{t}{1 - t} + 1 \right) f(\overline{x})$$

e cioè

$$tf(x') + (1-t)f(x'') \geq f(\overline{x})$$

che è proprio la (3.1), per $t \in (0,1)$; poiché per $t = 0$ o $t = 1$ la (3.1) è ovvia abbiamo dimostrato che f è convessa su K.

Per dimostrare la seconda parte dell'asserto osserviamo che se f è strettamente convessa allora è anche convessa e quindi vale la (3.3).

Sia $x \neq \overline{x}$, $h = x - \overline{x}$ e $t \in (0,1)$. Dalla (3.3) si ottiene

$$f(\overline{x} + th) - f(\overline{x}) \geq \mathrm{d}f(\overline{x})(th).$$

Dalla (3.5), che sussiste come disuguaglianza stretta poiché f è strettamente convessa, discende

$$f(\overline{x} + th) - f(\overline{x}) < t[f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})].$$

Di conseguenza

$$t\,\mathrm{d}f(\overline{x})(h) < t[f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})]$$

e dividendo entrambi i membri per t si ha la (3.4).

La dimostrazione che la (3.4) è sufficiente per la stretta convessità della funzione f è analoga a quella già fatta nel caso della convessità. □

Per funzioni di classe C^2 si possono dare altre condizioni necessarie e sufficienti per la convessità.

Sia $f \in C^2(K)$ e denotiamo con $Q_x(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$, il differenziale secondo di f, ovvero la forma quadratica

$$Q_x(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j.$$

Teorema 3.5.2. *Sia $f \in C^2(K)$ dove K è un aperto convesso. Allora:*

1. *f è convessa su K se, e solo se, $Q_x(\alpha) \geq 0$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^N$ e $\forall\, x \in K$ (ovvero Q_x è semidefinita positiva);*
2. *se $Q_x(\alpha) > 0$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $\forall\, x \in K$ (ovvero Q_x è definita positiva) allora f è strettamente convessa su K.*

Dimostrazione. Poiché K è convesso, per la formula di Taylor si ha

$$f(x) = f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(x - \overline{x}) + \frac{1}{2} Q_\xi(x - \overline{x}), \quad \forall\, x, \overline{x} \in K \tag{3.6}$$

dove ξ è un punto appartenente al segmento che congiunge x a $\overline{x}$.

Se vale l'ipotesi *2.* $Q_\xi(x - \overline{x}) > 0$ $\forall\, x, \overline{x} \in K$, con $x \neq \overline{x}$. Quindi

$$f(x) > f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(x - \overline{x}) ,$$

cioè f è strettamente convessa per la **Proposizione 3.5.3.**

Allo stesso modo ovviamente si dimostra che se $Q_x(\alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^N$ e $\forall x \in K$ allora f è convessa su K.

Supponiamo ora che f sia convessa e che Q_x non sia semidefinita positiva $\forall\, x \in K$. Ciò vuol dire che esistono $\overline{x} \in K$ e $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tali che

$$Q_{\overline{x}}(\overline{\alpha}) < 0. \tag{3.7}$$

Poichè $f \in C^2(K)$ la (3.7) implica che $Q_y(\overline{\alpha}) < 0$ per ogni y in un opportuno intorno sferico di $\overline{x}$ di raggio $\delta > 0$.

Poniamo $x = \overline{x} + t\overline{\alpha}$ con t sufficientemente piccolo in modo che x appartenga all'intorno sferico di $\overline{x}$ di raggio δ. Poichè ogni forma quadratica è una funzione omogenea di grado 2 si ha

$$Q_\xi(t\overline{\alpha}) = t^2 Q_\xi(\overline{\alpha}) < 0$$

e quindi dalla (3.6) discende

$$f(x) < f(\overline{x}) + \mathrm{d}f(\overline{x})(x - \overline{x})$$

che, per la **Proposizione 3.5.3**, contraddice l'ipotesi di convessità. □

Esempio 3.5.3. Se la funzione f è un polinomio omogeneo di grado 2 (cioè una forma quadratica) la cui matrice dei coefficienti è simmetrica,

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

allora $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 2a_{ij}$ e quindi $Q_x(\alpha) = 2f(\alpha)$.

Di conseguenza f è convessa se $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e $(-f)$ è convessa se $f(x) \leq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. Se $f(x)$ cambia segno allora nè f né $(-f)$ sono convesse.

Per funzioni convesse vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.5.4. *Ogni punto stazionario (o critico) di una funzione differenziabile convessa su un aperto convesso K è un punto di minimo assoluto.*

Dimostrazione. Segue facilmente dalla **Proposizione 3.5.3.** □

Corollario 3.5.1. *Una funzione differenziabile e strettamente convessa su un aperto convesso K ha al più un punto critico (e quindi al più un punto di minimo).*

Dimostrazione. Se x' e x'' sono due punti stazionari distinti, per la **Proposizione 3.5.3** si ha

$$f(x') > f(x'') \quad \text{e} \quad f(x') < f(x'')$$

per cui $x' = x''$. □

Definizione 3.5.2. Una funzione f si dice *concava* (rispettivamente *strettamente concava*) se è definita su un insieme convesso e $(-f)$ è convessa (rispettivamente strettamente convessa).

Per le funzioni concave valgono proprietà analoghe a quelle dimostrate per le funzioni convesse, ovviamente con le opportune modifiche.

3.6 Funzioni definite tramite integrali

Riepiloghiamo le regole di derivazione per le funzioni integrali in una variabile, che ci saranno utili per generalizzare al caso in cui consideriamo anche funzioni in più variabili.

$F(x)$	$F'(x)$
$\int_a^x f(t)\,dt$	$f(x)$
$\int_x^b f(t)\,dt$	$-f(x)$
$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$	$f(g(x))\cdot g'(x)$
$\int_{g(x)}^b f(t)\,dt$	$-f(g(x))\cdot g'(x)$

Consideriamo ora

$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \quad \alpha,\,\beta : X\subseteq\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}.$$

La funzione F è composta di quella che a x associa il vettore $(\alpha(x),\beta(x))=(u,v)$ e della funzione G che a (u,v) associa $\int_u^v f(t)\,dt$. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, avremo che $\forall\, i=1,\ldots,N$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x_i}=-f(\alpha(x))\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}+f(\beta(x))\frac{\partial \beta}{\partial x_i}.$$

Esempio 3.6.1. Calcoliamo la derivata di

$$F(x,y)=\int_{xy}^{x^2+y^2}\sin t\,dt.$$

Applicando la formula che abbiamo dedotto, troviamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -\sin(xy)\cdot y+\sin(x^2+y^2)\cdot 2x,\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\sin(xy)\cdot x+\sin(x^2+y^2)\cdot 2y.\end{aligned}$$

Supponiamo ora di avere una funzione del tipo

$$F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt, \quad a,b\in\mathbb{R},\ f:X\times[a,b]\to\mathbb{R}$$

dove a e b sono costanti fissate. Se f è continua in $X\times[a,b]\subseteq\mathbb{R}^{N+1}$, allora F è continua in $X\subseteq\mathbb{R}^N$. Vale inoltre il seguente

Teorema 3.6.1 (di derivazione sotto il segno di integrale). *Se f è di classe $C^1(X\times[a,b])$, allora F è parzialmente derivabile rispetto a tutte le variabili x_i $\forall\, i=1,\ldots,N$ e si ha $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt$; OVVERO*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt.$$

Dimostrazione. Notiamo che ha senso parlare dell'integrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt$ in quanto le derivate di f sono per ipotesi continue, quindi integrabili.

Fissiamo ora un punto $x_0 \in X$ e il versore $\underline{e}_i = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ che ha tutte le coordinate nulle eccetto la i-esima che è pari a uno. Allora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h\underline{e}_i) - F(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^b f(x_0 + h\underline{e}_i, t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(x_0,t)\,\mathrm{d}t}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^b [f(x_0 + h\underline{e}_i, t) - f(x_0,t)]\,\mathrm{d}t}{h}.
\end{aligned}$$

Per il teorema di Lagrange, l'incremento della funzione f presente in quest'ultimo limite è pari a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \vartheta_h \underline{e}_i, t)\cdot h$, per un certo ϑ_h compreso fra zero e h.

La tesi consiste a questo punto nel verificare che

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \vartheta_h \underline{e}_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,t)\right] dt = 0.$$

Fissiamo un $\rho > 0$ tale che $x_0 + \vartheta_h \underline{e}_i \in B_\rho(x_0)$; dato che $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è continua nell'insieme compatto $B_\rho(x_0)\times[a,b]$, in questo stesso insieme è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor. Conseguentemente

$$\begin{gathered}
\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, (x',t'),(x'',t'') \in \overset{B_\rho(x_0)}{\cancel{X}} \times [a,b] : 0 < \|(x',t') - (x'',t'')\| < \delta_\varepsilon \\
\text{si ha che } \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x',t') - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x'',t'')\right| < \varepsilon.
\end{gathered}$$

Basta quindi che sia $\|(x_0 + \vartheta_h \underline{e}_i, t) - (x_0,t)\| < \delta_\varepsilon$ affinché

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \vartheta_h \underline{e}_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,t)\right] dt < \varepsilon(b-a)$$

che era quanto volevamo dimostrare. □

Esempio 3.6.2. Calcoliamo le derivate di

$$F(x,y) = \int_1^2 e^{(x+y)t}\,\mathrm{d}t.$$

Dato che la funzione integranda è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [1,2])$, possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e affermare che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial(e^{(x+y)t})}{\partial x}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 te^{(x+y)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Un altro caso che ci si può presentare è quello di funzioni del tipo

$$F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad y,z\in\mathbb{R},\ f : X\times[y,z]\to\mathbb{R}$$

con y e z variabili. Se f è almeno di classe $C^1(X \times [y,z])$, possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e dedurre che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y,z) = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt.$$

Invece, rispetto alle variabili y e z la funzione F è una funzione integrale; utilizzando le regole presentate nella tabella all'inizio di questo paragrafo, basta che la funzione f sia continua per concludere che

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -f(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f(x,z).$$

Esempio 3.6.3. Deriviamo parzialmente la funzione

$$F(x_1,x_2,y,z) = \int_y^z x_1^2 \sin(x_2 t)\,dt.$$

Applicando il **Teorema 3.6.1**, otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_y^z 2x_1 \sin(x_2 t)\,dt, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_y^z x_1^2 t \cos(x_2 t)\,dt,$$

mentre invece

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x_1^2 \sin(x_2 y), \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = x_1^2 \sin(x_2 z).$$

L'ultimo caso che studiamo è quello, più generale, di funzioni del tipo

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt, \quad \alpha, \beta : X \to \mathbb{R}, \ f : X \times I \to \mathbb{R}$$

dove X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, I un intervallo di $\mathbb{R}$, e le tre funzioni sono di classe C^1 nei rispettivi insiemi di definizione. La funzione F è composta dalle funzioni $\gamma(x) = (x, \alpha(x), \beta(x)) = (x,y,z)$ e $G(x,y,z) = \displaystyle\int_y^z f(x,t)\,dt$; per il teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x)}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_i} = \\
&= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt - f(x,\alpha(x)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + f(x,\beta(x)) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.6.4. Calcoliamo le derivate di

$$F(x,y) = \int_x^{e^{x+y}} \sin(yt)\,dt.$$

Tali derivate valgono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \int_x^{e^{x+y}} 0\,\mathrm{d}t - \sin(xy)\cdot 1 + \sin(ye^{x+y})e^{x+y} = \\
&= e^{x+y}\sin(ye^{x+y}) - \sin(xy), \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \int_x^{e^{x+y}} t\cos(yt)\,\mathrm{d}t - \sin(xy)\cdot 0 + \sin(ye^{x+y})e^{x+y} = \\
&= \int_x^{e^{x+y}} t\cos(yt)\,\mathrm{d}t + e^{x+y}\sin(ye^{x+y}).
\end{aligned}$$