Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 2 – 8 ottobre 2015
Alcune soluzioni

4) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine (indicando il resto in forma di Peano) delle funzioni:

$$f(x,y) = \cos(e^{2y} - 2\sin(x) - 1) \quad \text{nel punto } (0,0),$$
$$g(x,y) = x^2y^3 \quad \text{nel punto } (1,1).$$

$$f(x,y) = 1 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + o(x^2+y^2),$$
$$g(x,y) = 1+2(x-1)+3(y-1)+(x-1)^2+6(x-1)(y-1)+3(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2).$$

7) Data la funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$h(x,y,z) = (x+y)(e^z-1) - (x^2+y^2)$$

determinare gli eventuali punti di estremo locale di h.

Osserviamo che $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e quindi cerchiamo i punti di estremo locale tra i punti critici della funzione h. Abbiamo che

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z-1-2x \\ e^z-1-2y \\ (x+y)e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0),$$

cioè l'origine è l'unico punto critico. Per determinarne la natura consideriamo l'Hessiano:

$$H_h(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det(H_h(0,0,0)) = 4 > 0$ almeno un autovalore è positivo, d'altronde essendo $\mathrm{tr}(H_h(0,0,0)) = -4 < 0$ almeno un autovalore è negativo, quindi $H_h(0,0,0)$ è indefinita e quindi l'origine è un punto di sella. Concludiamo che la funzione h non ha punti di estremo relativo.

(Per stabilire che $H_h(0,0,0)$ è indefinita possiamo anche ragionare come segue: essendo $H_h(0,0,0)$ una matrice 3×3, con $\det(H_h(0,0,0)) = 4 > 0$, essa può essere o definita positiva o indefinita, ma essendo il primo elemento in alto a sinistra della matrice $-2(< 0)$ per il criterio di Sylvester possiamo concludere che $H_h(0,0,0)$ non può essere definita positiva.)

8) Determinare gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x,y) = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4.$$

(Suggerimento: studiare il segno di f...)

Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi cerchiamo i punti di estremo locale e globale tra i punti critici. Il sistema:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -8xy^2 \\ 8y - 8x^2y - 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha come soluzioni i punti $(x_0, 0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ e i punti $(0, \pm\sqrt{2})$. Inoltre la matrice Hessiana ha la forma seguente:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -8y^2 & -16xy \\ -16xy & 8-8x^2-12y^2 \end{pmatrix},$$

quindi nei punti $(0,\pm\sqrt{2})$ si ottiene

$$H_f(0,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix},$$

che è definita negativa. Dunque i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ sono di massimo locale.
Invece, essendo $\det(H_f(x_0, 0)) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, per determinare la natura di questi punti critici conviene studiare il comportamento di f intorno all'asse delle ascisse. Osserviamo che $f(x_0, 0) = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, quindi lo studio del segno può fornirci le informazioni sufficienti per concludere. Essendo

$$f(x, y) = y^2(4 - 4x^2 - y^2)$$

vediamo che f si annulla sull'asse delle ascisse e sull'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$, mentre è negativa all'esterno dell'ellisse (chiaramente per $x \neq 0$) e positiva all'interno dell'ellisse (chiaramente per $x \neq 0$). Quindi deduciamo che se $|x_0| > 1$ i punti $(x_0, 0)$ sono di massimo locale per f, mentre se $|x_0| < 1$ i punti $(x_0, 0)$ sono di minimo locale. Infine i punti $(\pm 1, 0)$ sono di sella.

Mostriamo ora che $(0, \pm\sqrt{2})$ sono punti di massimo globale: per fare ciò dobbiamo provare che $f(x, y) \leq f(0, \pm\sqrt{2}) = 4$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ma questo è vero perché

$$f(x, y) \leq 4y^2 - y^4 = -(y - 2)^2 + 4 \leq 4.$$

Invece f non ammette minimo assoluto essendo, per esempio,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, 1) = -\infty.$$

9) (a) Trovare p e $q \in \mathbb{R}$ tali che la $f(x, y) = x^p + y^q$ sia convessa in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

(b) Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e crescente. Dimostrare che allora la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come $f(\underline{x}) := g(|\underline{x}|)$ è convessa.

(a) Poiché $f \in C^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\})$ per ogni $p, q \in \mathbb{R}$, f è convessa se e solo se il suo Hessiano è semidefinito positivo. Quindi essendo

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} p(p-1)x_0^{p-2} & 0 \\ 0 & q(q-1)y_0^{q-2} \end{pmatrix}$$

abbiamo che per f è convessa se e solo se $(p, q) \in [1, +\infty) \times [1, +\infty)$.

(b) Dobbiamo dimostrare che per ogni $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in [0, 1]$ vale

$$f(t\underline{x}_1 + (1 - t)\underline{x}_2) \leq tf(\underline{x}_1) + (1 - t)f(\underline{x}_2),$$

che si può riscrivere come

$$g(|t\underline{x}_1 + (1 - t)\underline{x}_2|) \leq tg(|\underline{x}_1|) + (1 - t)g(|\underline{x}_2|). \qquad (*)$$

Dalla disuguaglianza triangolare abbiamo che $|t\underline{x}_1 + (1 - t)\underline{x}_2| \leq t|\underline{x}_1| + (1 - t)|\underline{x}_2|$, quindi essendo g crescente e convessa otteniamo:

$$g(|t\underline{x}_1 + (1 - t)\underline{x}_2|) \leq g(t|\underline{x}_1| + (1 - t)|\underline{x}_2|) \leq tg(|\underline{x}_1|) + (1 - t)g(|\underline{x}_2|)$$

cioè $(*)$.