Analisi II, a.a. 2015-2016 – Esercizi 1 – 1 ottobre 2015
Alcune soluzioni

2) Stabilire se la seguente funzione è continua, differenziabile e di classe C^1 nel suo dominio e calcolarne il piano tangente nel punto $(1,0)$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Poiché $x^2+y^2 \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$, risulta che $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ e che $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ essendo ivi composizione di funzioni C^1.
Per studiare la continuità in $(0,0)$ calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{\rho^2} = 0$$

e siccome tale limite coincide con $g(0,0)$ possiamo concludere che g è continua anche nell'origine.
Verifichiamo se g ammette derivate parziali in $(0,0)$: essendo

$$g_x(x,y) = \lim_{h\to0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 1, \quad g_y(x,y) = \lim_{k\to0} \frac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = -1,$$

g è derivabile nell'origine.
La funzione non è però differenziabile (e quindi neanche C^1) nell'origine in quanto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)-g(0,0)-g_x(0,0)h-g_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0.$$

Infatti tale limite non esiste essendo:

$$\frac{g(h,k)-g(0,0)-g_x(0,0)h-g_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk^2+h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} 0 & \text{se } h=k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } h=-k. \end{cases}$$

Infine, per calcolare il piano tangente in $(1,0)$, calcoliamo $g_x(1,0)$ e $g_y(1,0)$. Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$g_x(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad g_y(x,y) = \frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

quindi

$$g_x(1,0) = 1, \quad g_y(1,0) = 0,$$

inoltre essendo $g(1,0) = 1$ il piano tangente è $z = x$.

5) Studiare al variare del parametro reale positivo α, continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione:

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x) + |x|^\alpha \frac{\log(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

g è continua nell'origine se e solo se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$ e quindi siccome per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\cos(x) + |x|^\alpha \frac{\log(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\cos(x) + |x|^\alpha \frac{-(x^2+y^2)(1+o(1))}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\cos(x) - |x|^\alpha(1+o(1))) = 1 = g(0,0),$$

possiamo concludere che g è continua nell'origine per ogni $\alpha > 0$.
Determiniamo ora per quali valori di α esistono finiti i limiti dei rapporti incrementali:

$$\lim_{h\to0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\cos(h) + |h|^\alpha \frac{\log(1-h^2)}{h^2} - 1}{h}$$
$$= \lim_{h\to0} \frac{(\cos(h)-1) - |h|^\alpha(1+o(1))}{h} = \lim_{h\to0} \frac{(-h^2/2 - |h|^\alpha)(1+o(1))}{h} = 0$$

per ogni $\alpha > 1$. Mentre per $\alpha \leq 1$ il limite non esiste, in particolare se $\alpha = 1$ il limite non esiste a causa della presenza del valore assoluto.
Per quanto riguarda la derivata rispetto a y si vede immediatamente che per ogni $\alpha > 0$ si ha:

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(0,k) - g(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1-1}{k} = 0.$$

Quindi g è derivabile nell'origine per ogni $\alpha > 1$ e si ha

$$g_x(0,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad g_y(0,0) = 0.$$

Infine per studiare la differenziabilità calcoliamo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cos(h) + |h|^\alpha \frac{\log(1-h^2-k^2)}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(\cos(h)-1) + |h|^\alpha(-1+o(1))}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(-\frac{h^2}{2} - |h|^\alpha)(1+o(1))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

per ogni $\alpha > 1$. Quindi g è differenziabile per ogni $\alpha > 1$.

6) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità nel suo dominio al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.
Poiché $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ se e solo se $(x,y) = (1,1)$, abbiamo che $Dom(f) = \mathbb{R}^2$. Inoltre la funzione è differenziabile per ogni $(x,y) \neq (1,1)$.
Per studiare la continuità in $(1,1)$ passiamo a coordinate polari $x = 1 + \rho\cos(\theta)$ e $y = 1 + \rho\sin(\theta)$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3}{\rho^{2\alpha}} = 0 = f(1,1)$$

se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$. Quindi f è continua in $(1,1)$ per $\alpha < \frac{3}{2}$.
Consideriamo ora i limiti dei rapporti incrementali nel punto $(1,1)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^{2\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Analogamente

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(1,1+k) - f(1,1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^3}{k^{2\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ -1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \text{non esiste finito} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Per cui f è derivabile in $(1,1)$ per $\alpha \leq 1$. Infine per quanto riguarda la differenziabilità, passando a coordinate polari ($h = \rho\cos(\theta)$, $k = \rho\sin(\theta)$), abbiamo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,1+k) - f(1,1) - f_x(1,1)h - f_y(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\begin{cases} \lim_{\rho\to 0^+} \rho^{2-2\alpha}(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3 = 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ \lim_{\rho\to 0^+} -2\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos(\theta)-\sin(\theta)) & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Poiché $\lim_{\rho\to 0^+} -2\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos(\theta)-\sin(\theta))$ non esiste, in quanto dipende da θ, concludiamo che f è differenziabile in $(1,1)$ solo per $\alpha < 1$.

7) Dimostrare che sono definite e differenziabili le funzioni

$$F(x,y) = \int_x^{3y} \frac{e^t - 1}{t} dt, \qquad G(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt$$

e calcolare le derivate direzionali di F in $(1,1)$.

La funzione $f(t) = \frac{e^t-1}{t}$ può essere estesa per continuità nell'origine ponendola uguale a 1 e quindi risulta integrabile su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Quindi F è ben definita su $\mathbb{R}^2$ e applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo otteniamo che

$$F_x(x,y) = -\frac{e^x - 1}{x}, \quad F_y(x,y) = \frac{e^{3y}-1}{y}.$$

Essendo le derivate parziali continue, F risulta differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

La funzione $g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ non è invece prolungabile per continuità nell'origine, ma è comunque integrabile in senso improprio avendo lo stesso comportamento asintotico di $t^{-\frac{1}{2}}$. La funzione G è pertanto ben definita. Per $x \neq 0$ e $y \neq 0$ possiamo ancora applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo ottenendo:

$$G_x(x,y) = -2\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}, \quad G_y(x,y) = 2\frac{\cos(y^2)-1}{y^4}.$$

Se invece, ad esempio, vogliamo calcolare la derivata parziale rispetto ad x in $(0, y_0)$, con $y_0 \in \mathbb{R}$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{h} \int_0^{h^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt \right).$$

Poiché $h \to 0$ e $\int_0^{h^2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt \to 0$ possiamo applicare il Teorema di de l'Hopital (combinato con il Teorema Fondamentale del Calcolo) e abbiamo che tale limite vale -1, che è esattamente il limite di $G_x(x,y)$ per $(x,y) \to (0, y_0)$. Siccome lo stesso ragionamento si può ripetere sia per G_x che per G_y in ogni punto degli assi cartesiani abbiamo che le derivate parziali sono continue e quindi G è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

9) Dimostrare che ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ connesso per poligonali è connesso.

Supponiamo per assurdo che esistano $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = A$. Siano $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$, per ipotesi esiste una poligonale contenuta in A di vertici $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con $x_0 = a_1$ e $x_n = a_2$.
Per definizione di poligonale esiste una mappa continua

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,n] & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

tale che $\gamma(k) = x_k$ per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Sia

$$\bar{s} = \sup\{t \in [0,n] \,|\, \gamma(t) \in A_1\},$$

allora poiché $\gamma(\bar{s}) \in A$ abbiamo che o $\gamma(\bar{s}) \in A_1$ oppure $\gamma(\bar{s}) \in A_2$.
Se fosse $\gamma(\bar{s}) \in A_1$, essendo A_1 aperto e γ continua, avremmo che per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo $\gamma(\bar{s} + \epsilon) \in A_1$ e otterremmo quindi una contraddizione con la definizione di $\bar{s}$.
Dunque deve essere $\gamma(\bar{s}) \in A_2$ e quindi, per definizione di $\bar{s}$, esiste una successione $s_n \nearrow \bar{s}$ tale che $\gamma(s_n) \in A_1$. D'altronde essendo A_2 aperto e γ continua esiste $\bar{\epsilon} > 0$ tale che $\gamma(\bar{s} - \epsilon) \in A_2$ per ogni $\epsilon(0, \bar{\epsilon})$, ma questo contraddice l'esistenza della successione $s_n \Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow A$ è connesso.
(Nota: è chiaro dalla dimostrazione che l'ipotesi *connesso per poligonali* può essere sostituita dall'ipotesi *connesso per archi*)