Chimica Industriale
Matematica II
2015/2016
Programma dettagliato del corso

1. **Numeri complessi.**
   - Il campo dei numeri complessi. Forma algebrica. Modulo e coniugato. Forma trigonometrica. Significato geometrico delle operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza intera. Estrazione di radice con rappresentazione geometrica.
   - Polinomi nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra e teorema di Ruffini.
   - Distanza in $\mathbb{C}$. Limiti di successioni nel campo complesso. Serie numeriche nel campo complesso. Criterio di "convergenza assoluta". Serie di potenze nel campo complesso e loro insieme di convergenza. La serie esponenziale. Forma di Eulero dei numeri complessi.
2. **Algebra Lineare.**
   - I vettori nel piano e nello spazio (lunghezza, direzione e verso), somma di due vettori con la regola del parallelogramma, dilatazioni, contrazioni e cambiamento di verso di vettori. Proprietá di queste operazioni. I vettori nel piano e nello spazio in cui si sia introdotto un sistema di coordinate cartesiane.
   - Definizione di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Esempi:
     $$\mathbb{R}^n,\ C([a,b]),\ C^n([a,b]),\ C^{+\infty}([a,b]), P(x),\ P_n(x).$$
     Combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti, sottospazi vettoriali, sottospazi generati da n vettori, insiemi di generatori, base. Dimensione di uno spazio vettoriale.
   - Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Nucleo e immagine. Esempi di applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Esempi di applicazioni lineari: l'operatore di derivazione e l'integrale definito.
   - Matrici a m righe e n colonne, addizione e moltiplicazione per uno scalare. La matrice trasposta. Proprietá della trasposizione. Matrici simmetriche. Lo spazio vettoriale delle matrici nXm. Moltiplicazione righe per colonne tra matrici. L'anello delle matrici quadrate di dimensione n. La matrice identitá e le sue proprietá. La matrice inversa. Il determinante. Proprietá del determinante. Teorema sulla caratterizzazione delle matrici invertibili. Teorema di Binet. Rango di una matrice.
   - Teorema di rappresentazione delle applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita.

- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite. Teorema di Cramer (con dimostrazione). Sistemi lineari di m equazioni in n incognite.Teorema di Rouché Capelli (con dimostrazione). Sistemi omogenei. Condizioni necessaria e sufficiente perché un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite abbia soluzioni non banali (con dimostrazione).
- Autovalori e autovettori di una matrice. Caratterizzazione degli autovalori (con dimostrazione). Autovettori e autospazio associati ad un autovalore. Autovalori regolari.
- Poliniomi di primo grado omogenei in una o piú variabili, applicazioni lineari e matrice rappresentativa.
- Polinomi di secondo grado omogenei in una o piú variabili, forme quadratiche e matrice **simmetrica** rappresentativa. Forme quadratiche definite, semidefinite, indefinte. Teorema che collega il segno di una forma quadratica con il segno degli autovalori della matrice rappresentativa (con cenno di dimostrazione). Caso delle forme quadratiche in due variabili: teorema che collega il segno di una forma quadratica con il segno del determinante della matrice rappresentativa.
- Prodotto scalare tra i vettori dello spazio o del piano. Ortogonalitá e lunghezza.
- Prodotto vettoriale tra i vettori dello spazio tridimensionale. Parallelismo. Area di un parallelogramma.
- Cenni di geometria analitica lineare nello spazio: equazioni di un piano che contiene un punto dato ed é ortogonale ad un vettore dato.

3. Equazioni differenziali.

- Equazioni differenziali del primo ordine: integrale generale e problema di Cauchy. Teoremi di esistenza ed unicitá locale e globale. Equaioni differenziali a variabili saparabili. Equazioni differenziali lineari: il metodo del fattore integrante.
- Equazioni differenziali del secondo ordine: integrale generale e problema di Cauchy. Equazioni differenziali del secondo ordine lineari: struttura dell'integrale generale (con dimostrazione). Teorema di esistenza ed unicitá globale per il problema di Cauchy. L'integrale generale dell'omogenea. Metodo della variazione delle costanti nella ricerca di una soluzione della non omogenea. L'integrale generale dell'omogenea nel caso dei coefficienti costanti, polinomio caratteristico. Metodo di somiglianza nella ricerca di una soluzione della equazione non omogenea, nel caso dei coefficienti costanti.
- Cenni sulle equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo.

4. Curve.

- Funzioni di una variabile reale a valori vettoriali. Curva, sostegno di una curva.
- Limiti. Continuitá. Condizioni necessarie e sufficienti sulle componenti. Curve semplici. Curve chiuse. Esempi di curve piane: rette, circonferenze, ellissi, folium di Cartesio, spirale di Archimede, spirale logaritmica. Esempi di curve nello spazio: elica cilindrica, elica conica .
- Derivabilitá. Condizioni necessarie e sufficienti sulle componenti. Vettore derivato o vettore velocitá, vettore e retta tangente. Curve regolari. Algebra della derivate.

- Curve piane: grafico di una funzione reale di variabile reale, curve in forma polare.
- Lunghezza di una curva: definizione e formula (con dimostrazione). Il parametro arco.
- Integrali di linea di prima specie: definizioni, proprietá.

Topologia in $\mathbb{R}^2$ e R^3.

- Insiemi limitati. Insiemi aperti, chiusi, frontiera di un insieme. Caratterizzazione degli insiemi aperti e chiusi rispetto alla frontiera. Unione, e intersezione finite e numerabili di insiemi aperti e chiusi.
- Insiemi connessi.
- Domini semplicemente connessi: esempi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

5. **Funzioni a valori reali di due variabili reali.**
   - Funzioni a valori reali di due variabili reali. Grafici e curve di livello.
   - Limiti e continuitá. Forme indeterminate. Comportamento della funzione
     $$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
     per $(x, y) \to (0, 0)$. Teorema di Weierstress. Teorema di esistenza degli zeri. Studio del segno di una funzione.
   - Derivate parziali. Gradiente. Differenziabilitá, piano tangente, differenziale. Continuitá delle funzioni differenziabili. Esistenza delle derivate parziali per le funzioni differenziabili. Formula di Taylor di ordine uno. Condizioni sufficienti per la differenziabiltá. Derivate direzionali: definizione e formula del gradiente (con dimostrazione). Significato del gradiente. Algebra delle derivate. Derivazione delle funzioni composte. Ortogonalitá del gradiente rispetto alle curve di livello (con dimostrazione).
   - Punti di massimo e minimo locale, punti di sella. Punti critici. Teorema di Fermat con esempi e controesempi. Derivate seconde. Teorema di Schwarz. Differenziale secondo, matrice Hesssiana, formula di Taylor di ordine due. Studio della natura dei punti critici.
   - Funzioni definite implicitamente. Teorema di Dini. Derivata prima e seconda della funzione definita implicitamente.
   - Estremi vincolati: caso in cui il vincolo é una curva in forma parametrica. Osservazioni sulla tangenza tra il vincolo e le curve di livello della funzione di cui si cercano gli estremi. Caso in cui il vincolo é dato in forma implicita e metodo dei moltiplicatori di Lagrange (con dimostrazione).
6. **Funzioni di piú variabili a valori vettoriali.**
   - Limiti, continuitá, differenziabilitá, matrice Jacobiana. Esempi:
   - Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: coordinate polari, coordinate sferiche e loro matrice Jacobiana.
   - Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:
     - campi conservativi e potenziale, campi irrotazionali. Condizione necessaria perché un campo sia conservativo (con dimostrazione).

- Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva o integrale di linea di seconda specie. Proprietá. Teoremi sul lavoro di un campo conservativo. Condizione sufficienti perché un campo sia conservativo. Condizioni equivalenti all'essere un campo conservativo.
- I campi

$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) \quad \mathbf{G}(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$$

Integrali doppi.

- Definizione. Domini x-semplici, y-semplici, regolari.
- Metodo di riduzione. Calcolo di baricentri. Cambiamento di variabili: passaggio a coordinate polari. Altri semplici cambiamenti di coordinate. Integrali doppi generalizzati. Integrale della gaussiana (con dimostrazione).
- Formule di Gauss-Green nel piano. Utilizzo delle formule nella dimostrazione che il lavoro di un campo irrotazionale lungo una curva chiusa, contenuta in una componente semplicemente connessa del dominio del campo, é nullo. Calcolo di aree mediante integrli curvilinei. Teoremi del rotore e della divergenza in $\mathbb{R}^2$.

Cenni

- **Spazi vettoriali.**
  - Prodotto misto tra i vettori dello spazio tridimensionale. Complanaritá. Volume di un parallelepipedo.
  - Osservazioni sulle applcazioni del prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, norma euclidea e distanza euclidea. Come agisce il prodotto scalare sulle componenti scalari. Basi ortonormali. Il teorema di Pitagora. Spazi vettoriali astratti con prodotto scalare. Esempi: $C([a,b]$ con $< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Cenni su serie trigonometriche e su serie di Fourier.
- **Equazioni differenziali.**
  - Esempi di equazioni della dinamica di popolazioni: l'equazione di Malthus e l'equazione logistica.
  - Esempi di equazioni della cinetica chimica: reazioni del primo e del secondo ordine con una o due componenti.
- **Funzioni a valori reali di due variabili reali.**
  - Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.
- **Funzioni di piú variabili a valori vettoriali.**
  - Superfici in forma parametrica.
- **Integrali multipli.**
  - Integrali tripli. Integrazione per "fili" e per "strati". Cambiamento di variabili: passaggio a coordinate sferiche.
  - Integrali superficiali.
  - Teoremi del rotore e della divergenza, caso generale.