Corso di laurea in Chimica Industriale
Matematica II
A.A. 2015/2016
Argomenti delle lezioni

Giovedí 3 marzo - 2 ore.

Richiami sulle equazioni e sui metodi utilizzati nel risolverle.
• Equazioni differenziali. Definizioni: ordine, forma normale.
• Esempi.
○ Equazioni del primo ordine:

$$y' = \cos x \quad y' = \sqrt{1-x^2} \quad y' = y \quad y' = y^2 \quad y' = y(1-y) \quad y' = xy$$

Osservazioni sulle informazioni che l'equazione fornisce sulla monotonia delle soluzioni.
○ Equazioni del secondo ordine:

$$y'' = \cos x \quad y'' = (y')^2 \quad y'' = 2y' - y + \sin x$$

• Definizioni: soluzione, integrale generale (= insieme di tutte le soluzioni).
• Esercizi
○ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y' = \cos x \quad y' = \sqrt{1-x^2}$$

L'integrale generale della prima é $\int \cos x\, dx = \{\sin x + c : \ c \in \mathbb{R}\}$
L'integrale generale della seconda é $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \{\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2} + c : \ c \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichino le due affermazioni.
○ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y' = y \quad y' = y^2 \quad y' = y(1-y) \quad y' = xy$$

○ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y'' = \cos x \quad y'' = (y')^2$$

• Applicazioni
○ Equazioni delle cinetica chimica:

$$y' = -ky \quad y' = -ky^2$$

○ Equazioni che descrivono la dinamica di popolazioni

$$y' = ky \quad y' = ky(1-y) \quad y' = ky\sin(\frac{2\pi}{12}t)$$

k é una costante positiva fissata.
○ Equazioni autonome.

Venerdí 4 marzo - 2 ore.

• Equazioni a variabili separabili,

$$y' = f(x)g(y)$$

con metodo risolutivo.
◦ Esercizi
◦ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y' = -ky \quad y' = -ky^2 \quad y' = x\sqrt{y} \quad y' = \frac{x}{y}$$

◦ Problema di Cauchy per equazioni differenziali del primo ordine a variabili sparabili.

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in$dom$f$ e $y_0 \in$ dom g.
◦ Teoremi di esistenza ed unicitá locale e globale delle soluzioni del problema di Cauchy, senza dimostrazione.

Teorema 1: Esistenza locale
Ipotesi
1. f continua in (a, b);
2. g continua in (c, d);
$x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in (c, d)$ allora
tesi
il problema ammette almeno una soluzione, definita in un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$.

Teorema 2: Esistenza e unicitá locale
Ipotesi
1. f continua in (a, b);
2. g derivabile, con derivata continua in (c, d);
$x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in (c, d)$ allora
tesi
il problema ammette esattamente una soluzione. Questa soluzione é definita in un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$.

Controesempio all'unicitá
Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni: $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{x^3}{3\sqrt{3}}$
Teorema 3: Esistenza e unicitá globale
Ipotesi
1. f continua in (a, b);
2. g derivabile, con derivata continua e limitata in $\mathbb{R}$;
$x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ allora
tesi

il problema ammette esattamente una soluzione, e questa é definita in (a, b).

Controesempio all'esistenza globale

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(5) = 3 \end{cases}$$

La soluzione di questo problema é $y(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, che ha dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$, mentre il dominio di $f(x) = x$ é $\mathbb{R}$.

• Esercizi

○ Esercizio 1

i) Si risolva il seguenti problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $k > 0$ e $y_0 \geq 0$

ii) Si abbozzi i grafico della soluzione $y = y(t)$ per $t \geq 0$

iii) si trovi t per cui

$$y(t) = \frac{y_0}{2}$$

○ Esercizio 2

i) Si risolva il seguenti problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ky^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $k > 0$ e $y_0 \geq 0$

ii) Si abbozzi i grafico della soluzione $y = y(t)$ per $t \geq 0$

iii) si trovi t per cui

$$y(t) = \frac{y_0}{2}$$

• Equazioni lineari del primo ordine

$$y' + a(x)y = f(x)$$

○ **Teorema 4: Esistenza e unicitá globale per le equazioni lineari del primo ordine**

Ipotesi

1. $a(x)$ continua in (a, b);
2. $f(x)$ continua in (c, d);

$x_0 \in (a, b) \cap (c.d)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ allora

tesi
il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette esattamente una soluzione, e questa é definita in $(a, b) \cap (c.d)$.
∘ Metodo risolutivo del "fattore integrante".
∘ Esercizio.
Si risolva la seguente equazione

$$y' + y = x$$

∘ Osservazione sulla struttura dell'integrale generale di questa equazione.
L'integrale generale

$$y(x) = (x - 1) + ce^{-x}$$

é la somma di $\overline{y}(x) = x - 1$, che é una soluzione delle'equazione, e di $y_c(x) = ce^{-x}$ che sono tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' + y = 0$$

che si chiama **equazione omogenea associata**.
La struttura di questo insieme é la stessa dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y' = f(x)$$

che é

$$y(x) = F(x) + c$$

dove $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$ e le funzioni costanti $y(x) \equiv c$ sono tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associate

$$y' = 0$$

Giovedí 10 marzo - 2 ore.

• Esercizi.
∘ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y' + \tan x\, y = \sin x$$

$$y' + 2x = \sin x$$

$$y' - 2y = e^{3x}$$

∘ Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy.

$$\begin{cases} y' + \tan x\, y = \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + \tan x\, y = \sin x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

○ Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y'' = x\,\log x$$

$$y'' + y' = x^2 + x$$

• Definizione di spazio vettoriale.
Esempi di spazi vettoriali.
Sia Iun intervallo, $\mathbb{C}^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$: continue in $I\}$, $\mathbb{C}^1(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$: derivabili con derivata continua in $I\}$e $\mathbb{C}^2(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$: derivabili due volte con derivate continue in $I\}$, $\mathbb{C}^0(I)$, $\mathbb{C}^1(I)$ e $\mathbb{C}^2(I)$ sono spazi vettoriali.

• Definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali.
• Equazioni lineari.
○ Teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari, con dimostrazione.
○ Teorema: l'insieme delle soluzioni di un' equazione lineare omogenea é uno spazio vettoriale, con dimostrazione.
Esempi di applicazioni lineari:

○ Sia $a(x)$ continua in un intervallo I,

$$L:\ \mathbb{C}^1(I) \to\ \mathbb{C}^(I)$$

cosí definita

$$L(y) = y' + a(x)y$$

é lineare.
○ Siano $a(x)$ e $b(x)$ continue in un intervallo I,

$$L:\ \mathbb{C}^2(I) \to\ \mathbb{C}^(I)$$

cosí definita'

$$L(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

é lineare.

• Equazioni differenziali lineari e struttura dell'insieme delle soluzioni.

○ Esercizi: si risolvano le seguenti equazioni lineari e si osservi che, come ci si aspetta per la teoria, il loro integrale generale é l'insieme delle funzioni che si ottengono come somma di un fissato integrale particolare $\overline{y}$ con una qualunque soluzione dell'equazione omogenea associata.

$$y' + \tan x\, y = \sin x$$

$$y' + 2x = \sin x$$

$$y' - 2y = e^{3x}$$

$$y'' = x\,\log x$$

$$y'' + y' = x^2 + x$$

Venerdí 11 marzo - 2 ore.

• Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

○ Equazione omogenea associata.
○ Struttura dell'integrale generale.
Si dimostrerá che l'integrale genereale dell'equazione omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ha la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due qualunque soluzioni con $y_2(x) \neq ky_1(x)$.
Quindi, per risolvere l'equazione omogenea sará sufficiente trovare due soluzioni con questa proprietá
• Problema di Cauchy per equazioni del secondo ordine.

Teorema. Esistenza e unicitá globale per le equazioni lineari del secondo ordine
Ipotesi
1. $a(x)$ continua in (a, b);
2. $b(x)$ continua in (c, d);
3. $f(x)$ continua in (e, f);
$x_0 \in (a, b) \cap (c.d) \cap (e, f)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ allora
tesi
il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ammette esattamente una soluzione, e questa é definita in $(a, b) \cap (c.d) \cap (e, f)$.

• **Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.**($a(x) \equiv a$, $b(x) \equiv b$)

○ **Equazione omogenea**

$$y'' + ay' + by = 0$$

• **Proposizione 1.** (con dimostrazione)
$y(x) = e^{\lambda x}$ é soluzione dell'equazione omogenea

$$y'' + ay' + by = 0$$

se e solo se $\lambda \in \mathbb{R}$ é soluzione dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- Da questa Proposizione segue che, se l'equazione caratteristica ha due soluzioni distinte λ_1 e λ_2, l'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

• **Proposizione 2.** (con dimostrazione)
$y(x) = xe^{\lambda x}$ é soluzione dell'equazione omogenea

$$y'' + ay' + by = 0$$

se e solo se $\lambda \in \mathbb{R}$ é soluzione doppia dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- Da questa Proposizione segue che, se l'equazione caratteristica ha una soluzione doppia λ, allora l'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2\, xe^{\lambda x}$$

Si sanno quindi risolvere tutte le equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti la cui equazione caratteristica abbia discriminante $\Delta \geq 0$

◦ Esercizi.
- Si risolvano le seguenti equazioni differenziali.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

- Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'0) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

◦ **Equazione non omogenea**

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

◦ **Metodo di somiglianza** per la ricerca di una soluzione dell'equazione completa.
Esempi:
- nel caso in cui

$$f(x) = Ae^{Bx}$$

e questa funzione non sia soluzione dell'equazione omogenea associata, cioé B non sia soluzione dell'equazione caratteristica, si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = ke^{Bx}$$

con k da determinare;
- nel caso in cui

$$f(x) = Ax + B$$

e questa funzione non sia soluzione dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = k_1 x + k_2$$

con k_1, k_2 da determinare;
- nel caso in cui

$$f(x) = A\cos Cx + B\sin Cx$$

e questa funzione non sia soluzione dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = k_1\cos Cx + k_2\sin Cx$$

con k_1, k_2 da determinare.

○ Esercizi.
- Si risolvano le seguenti equazioni differenziali.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + x$$

$$y'' - 2y' + y = \sin x$$

$$y'' + y' = e^{3x}$$

- Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x^2 + x \\ y(0) = 0 \\ y'0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x^2 + x \\ y(0) = 0 \\ y'0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \sin x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \qquad ; \begin{cases} y'' - 2y' + y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Lunedí 14 marzo - 2 ore.

• I numeri complessi.
Definizioni e struttura di campo. I complessi "reali", il numero i.
Il campo complesso $\mathbb{C}$ non é ordinabile.
○ Forma algebrica, complesso coniugato e sue proprietá:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Se $z = a + ib$

$$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2ib$$

Modulo e suo significato geometrico. $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza di z_1 da z_2.
◦ Forma trigonometrica. Significato geometrico del prodotto. Elevamento a potenza intera. Radice quadrata.
◦ Esercizi.

Giovedí 17 marzo - 2 ore.

◦ **Esercizi.**

1. Sia $z = a + ib$, si scrivano le forme algebriche di

$$-z, \ \ \overline{z},, \ \ z^{-1}$$

2. Sia $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, si scrivano le forme trigonometriche di

$$-z, \ \ \overline{z},, \ \ z^{-1}$$

3. Si scriva la forma algebrica di $(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})^{-5}$
4. Si osservi che se $w \in \mathbb{R}$
$w > 0$ implica $\sqrt{w} = \pm\sqrt{w}$
$w < 0$ implica $\sqrt{w} = \pm i\sqrt{|w|}$

◦ Radici $n-$sime. Teorema fondamentale ell'algebra

• **Equazioni di secondo grado a coefficienti reali**

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. L'equazione

$$t^2 + at + b = 0$$

ammette sempre soluzione nel campo complesse.
Le soluzioni sono
-due reali distinte $\lambda_{1.2} = -\frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, se $\Delta > 0$,
-una reale $\lambda = -\frac{a}{2}$, di molteplicitá 2, se $\Delta = 0$
-due complesse coniugate $\lambda_{1.2} = -\frac{a \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$, se $\Delta < 0$,

• **Struttura di spazio metrico di $\mathbb{C}$.**

◦ Data una successione $z_n \in \mathbb{C}$, con

$$\lim_{n\to} z_n = z_0$$

si intende $\lim_{n\to} |z_n - z_0| = 0$.

Esercizi.

1. Si verifichi che

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n} + i(1 + \frac{1}{n})^n) = ie$$

2. Si verifichi che

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$$

se e solo se

$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}a_n=a\\ \lim_{n\to+\infty}b_n=b\end{cases}$$

- **Serie.**

Data una successione $z_n\in\mathbb{C}$, con

$$\sum_{k=0}^{+\infty}z_k$$

si intende $\lim_{n\to}S_n$ dove $S_n=z_0+z_1+z_2+....+z_n$
Si dice che la serie converge se esiste $S\in\mathbb{C}$, tale che

$$\lim_{n\to}S_n=S$$

Esercizio.
Si verifichi che

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{i}{2})^k=\frac{4}{5}+i\frac{2}{5}$$

∘ Convergenza in modulo o "assoluta". Si dice che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}z_k$$

converge in modulo o assolutamente, se converge la serie (a termini positivi)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|z_k|$$

Vale il seguente criterio, analogo al criterio di convergenza assoluta per le serie a termini reali:
Criterio di convergenza assoluta (senza dimostrazione): La convergenza assoluta implica la convergenza.

- **Le serie di potenze.**

Sia a_k una successione di numeri complessi, si dice serie di potenze, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$$

Le somme parziali sono i polinomi

$$S_n(x) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 +, , , +a_n z^n$$

Per il criterio di convergenza assoluta, la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$, per cui converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k||z|^k$$

A questa serie, che é a termini positivi, si pu applicare il criterio del rapporto, e si trova che la serie converge se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| < 1$$

e quindi,
- se $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \neq 0$, la serie converge per $|z| < \frac{1}{L}$.
Si puó dimostrare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ non converge se $|z| > \frac{1}{L}$, il comportamento nei punti $z : |z| = \frac{1}{L}$ deve essere analizzato caso per caso.
$R = \frac{1}{L}$, si dice raggio di convergenza della serie. L'isieme di convergenza é un cerchio, centrato nell'origine, che puó contenere parte della della circonferenza.
- se $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$
- se $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$, la serie converge solo per $z = 0$

Esercizi

1. Dimostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

converge per $|z| < 1$.

2. Dimostrare che le serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

convergono per ogni $z \in \mathbb{C}$.

◦ Funzione esponenziale e funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni di variabile complessa a valori complessi e^z, $\cos z$ e $\sin z$ nel seguente modo:
per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

∘ Si puó dimostrare che, come nel caso reale,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$$

∘ **Forma di Eulero** dei numeri complessi. Si osservi che se $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\beta 2k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\beta + i\sin\beta$$

Da questa osservazione segue:
- la forma di Eulero dei numeri complessi:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}$$

- e anche

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

- da cui seguono

$$e^{\alpha+i\beta} + e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha} 2\cos\beta$$
$$e^{\alpha+i\beta} - e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha} 2i\, \sin\beta$$

Venerdí 18 marzo - 2 ore.

Data una funione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ha significato porsi il problema dell'esistenza del

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se tale limite esiste ed é finito, di dice che la funzione é differenziabile in z_0 e si indica con $f'(z_0)$ tale limite.
Valgono le stesse regole di derivazione del caso reale e, in perticolare, in ogni punto

$$(e^{\lambda z})' = \lambda\, e^{\lambda z}$$

Da tutto quanto si é detto segue che:
1) se $\lambda = \alpha + i\beta$ é radice dell'equazione

$$t^2 + at + b = 0$$

allora la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, cosí definita

$$e^{(\alpha+i\beta)x}$$

é una funzione di variabile reale a valori complessi, soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

2) dal momento che l'equazione

$$t^2 + at + b = 0$$

é a coefficienti reali, se $\lambda = \alpha + i\beta$ é radice dell'equazione, allora anche $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ é radice, e quindi

$$e^{(\alpha - i\beta)x}$$

é soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = 0$$

3) per linearitá, anche ogni funzione

$$c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha+i\beta)x}$$

con c_1 e c_2 numeri complessi, é soluzione dell'equazione differenziale. In perticolare sono soluzioni le due funzioni a valori reali

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

infatti $y_1(x) = \frac{1}{2} e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2} e^{(\alpha-i\beta)x})$ e $y_2(x) = \frac{1}{2i} e^{(\alpha+i\beta)x} - \frac{1}{2i} e^{(\alpha-i\beta)x}$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y = 0 \qquad y'' + y' + y = 0$$

• Equazioni lineari a coefficiento costanti non omogenee. Metodo di somiglianza.

Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni

1.

$$y'' + y = x \quad y'' + y' = x \quad y'' = x$$

Nella prima equazioni si cerca un integrale particolare della forma

$$\overline{y}(x) = ax + b$$

Nella seconda equazione si deve cercare della forma

$$\overline{y}(x) = x(ax + b)$$

perché altrimenti si avrebbe a sinistra un polinomio di grado 0.
Per un motivo analogo, nella terza equazione si deve cercare della forma

$$\overline{y}(x) = x^2(ax + b)$$

2.

$$y'' + y = e^{-x} \quad y'' + y' = e^{-x}$$

Nella prima equazioni si cerca un integrale particolare della forma

$$\overline{y}(x) = k\, e^{-x}$$

Nella seconda equazione si deve cercare della forma

$$\overline{y}(x) = xk\, e^{-x}$$

perché $k\, e^{-x}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata.
3.

$$y'' + y' = \cos x \quad y'' + y = \cos x$$

Nella prima equazioni si cerca un integrale particolare della forma

$$\overline{y}(x) = a \cos x + b \sin x$$

Nella seconda equazione si deve cercare della forma

$$\overline{y}(x) = x(a \cos x + b \sin x)$$

perché $a \cos x + b \sin x$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Lunedí 21 marzo - 2 ore.

• Nel caso in cui

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$$

si cerca una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(x) = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x)$$

dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono due polinomi, di cui si devono determinare i coefficienti, che hanno entrambi grado uguale al massimo dei gradi di $P_1(x)$ e $P_2(x)$, e $0 \leq r \leq 2$ é la molteplicitá di $\alpha + i\beta$ come radice dell'equazione caratteristica.
Si osservi che gli esercizi 1-5 di venerdí 18, si riferiscono ai casi particolari:
1. $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_1(x) = x;$
2. $\alpha = -1,\ \beta = 0,\ P_1(x) = 1;$
3. $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_1(x) = 1;$

• Algebra lineare.

I vettori nel piano e nello spazio. Spazi vettoriali atratti. Esempi i vettori nel piano e nello spazio, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, l'insieme delle funzioni definite in un insieme D, l'insieme delle funzioni continue in D, l'insieme delle funzioni derivabili in D,, $C^1(D)$, $C^2(D)$, l'insieme delle funzioni integrabili in un intervallo I, l'insieme dei polinomi, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n.

Combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti, insieme di generatori di uno spazio vettoriale, base.
Teorema (senza dimostrazione). Se uno spazio vettoriale ha una base costituita di n elementi, ogni altra base ha n elementi.
Dimensione.
Sottospazi e loro dimensione.

Esercizi: si verifiche che
- $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n;
- l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n ha dimensione $n+1$

Teorema L'integrale generale dell'equazione lineare omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

é uno spazio vettoriale di dimensione 2 (con dimostrazione)..