Analisi Canale A-C
A.A. 2015/2016
Argomenti delle lezioni

Mercoledí 30 settembre - 2 ore.

Contare e misurare. Segmenti "incommensurabili".
I numeri reali: definizione assiomatica. Assiomi di campo ordinato e assioma dell'estremo superiore.
Osservazioni ed esercizi:
-Conseguenze degli assiomi di campo: proprietá di 0 nella moltiplicazione, legge di annullamento del prodotto.
Richiami alle equazioni polinomiali, equazioni di primo e di secondo grado.
- A proposito della relazione d'ordine e dei suoi assiomi: numeri positivi e negativi, segno di un numero e segno del suo opposto e del suo reciproco, regola dei segni.
Richiami alle disequazioni polinomiali, disequazioni di primo e di secondo grado.
- Sottoinsiemi di numeri reali:
I numeri naturali. Divisione euclidea, numeri primi, pari, fattorizzazione, coppie di numeri relativamente primi. Il successivo. Richiami alla divisione tra polinomi, algoritmo della divisione, teorema di Ruffini.
I numeri interi.
I numeri razionali. Dimostrazione della "incommensurabilitá" della diagonale di un quadrato di lato 1.
Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore ed inferiore. Insiemi limitati. Insiemi finiti e insiemi limitati. L'assioma dell'estremo superiore.

Giovedí 1 ottobrebre - 1 ora.

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$. Intervalli chiusi, aperti, né chiusi né aperti, limitati e illimitati.
L'assioma dell'estremo superiore é equivalente alla proprietá dell'estremo inferiore e alla proprietá dell'esistenza di almeno un elemento separatore per ogni coppia di insiemi separati.
Proprietá degli intervalli chiusi e limitati incapsulati, osservazione: questa proprietá non é equivalente all'assioma dell'estremo superiore. Proprietá archimedea dei numeri reali.
Proprietá equivalenti alla proprietá archimedea :
per ogni $a > 0$ e $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a}{n} < \varepsilon$;
$\mathbb{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$.
Esercizio: dimostrazione dell'esistenza di $\sqrt{2}$. Esistenza delle radici n-me aritmetiche dei numeri non-negativi.

Venerdí 1 ottobrebre - 2 ore .

Lunghezza di un intervallo, distanza tra due punti. Punto medio e raggio di un intervallo.

Il valore assoluto o modulo, significato geometrico, prime equazioni e disequazioni con il valore assoluto: per $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ fissati, si risolvano le seguenti equazioni e disequazioni:

$|x| = a$ $|x| \leq a$ $|x| < a$ $|x| \geq a$ $|x| > a$ $|x-b| = a$ $|x-b| \leq a$ $|x-b| < a$ $|x-b| \geq a$ $|x-b| > a$

Proprietá del valore assoluto rispetto alle operazioni. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto
Il principoi di induzione. Esercizi: si dimostri che:
1) per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

2) Per ogni $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, si ha, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ $n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mercoledí 7 ottobre - 2 ore.

Funzioni, dominio, codominio e insieme immagine, restrizioni ed estensioni, funzioni surriettive iniettive, biunivoche, funzione inversa.
Esempi di funzioni biunivoche: rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$, il piano e lo spazio cartesiani, simmetrie nel piano rispetto ad un punto e ad una retta, rappresentazione nel piano cartesiano delle simmetrie rispetto all'origine, all'asse delle x, all'asse delle y, alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Insiemi simmetrici.
Funzioni reali di variabile reale: funzioni lmitate, massimo e minimo di una funzione, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione, funzioni monotone, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche. Stretta monotonia ed invertibilitá, monotonia delle funzioni inverse di funzioni monotone. Grafico. Grafici delle funzioni monotone e delle funzioni pari e dispari.
Le successioni, caratterizzazione delle successioni monotone.
Funzioni potenza ad esponente intero e confronto dei loro grafici.

Giovedí 8 ottobre - 2 ore.

Esercizi su sottoinsiemi del piano.
Grafico della funzione inversa. Le funzioni $f(x) = \sqrt[n]{x}$
La composizione di funzioni. Le funzioni $f(x) = x^r$, con r razionale e loro grafico.
Le funzioni $f(x) = x^r$ con r reale e loro grafico.
Le funzioni esponenziali e logaritmiche e loro grafico.

Le funzioni trigonometriche e le loro "inverse" con grafici.

Venerdí 9 ottobre - 2 ore.

Composizione di funzioni. La funzione identitá. La funzione inversa della funzione composta da funzioni invertibili. Esercizi.
Esercizio: dimostrare che la funzione $y = \sin x_{|[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]}$ é invertibile e scrivere la funzione inversa utilizzando le funzioni elementari.
Osservazioni sui metodi risolutivi di equazioni e disequazioni. Esercizi.
Il grafico delle funzioni

$$y = -f(x), \quad y = f(-x)|, \quad y = |f(x)|, \quad y = f(|x|), \quad y = f(x) + a, \quad y = f(x + a),$$

Grafico di $y = ax^2 + bx + c$. Equazioni e disequazioni di secondo grado.
Le funzioni segno, parte intera, mantissa, la funzione caratteristica di un sottoinsieme e loro grafico.

Mercoledí 14 ottobre - 2 ore.

Successioni. Successioni reali.
Successioni limitate, estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di una successione.
Successioni monotone e loro caratterizzazione. Esempi ed esercizi.
Definizione di limite finito di una successione e di convergenza. Teorema con dimostrazione: ogni successione convergente é limitata, esempi di successioni limitate che non sono convergenti.
Successioni infinitesime,
Teorema. $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$
Limite infinito e successioni divergenti. Teorema con dimostrazione: ogni successione divergente non é limitata, esempi di successioni non limitate che non sono divergenti.
Successioni regolari.
Teorema con dimostrazione: ogni successione monotona é regolare. Esempi di successioni non monotone convergenti, esempi di successioni non monotone divergenti.
Teoremi: operazioni con i limiti; forme indeterminate.
Il limite e la relazione d'ordine: Teoremi del confronto e teoremi della permanenza del segno, con controesempi e cioé con esempi che chiariscono la necessitá di tutte le ipotesi.
Si suggeriscono i seguenti esercizi.

Mercoledí 21 ottobre - 2 ore. Teoremi della permanenza del segno, con dimostrazione.
Dimostrazioni di alcuni teoremi delle operazioni con i limiti: teorema sul prodotto di due successione convergenti; Teorema sulla convergenza della successione reciproca. Osservazioni: nel caso in cui $a_n \to 0$, la successione $\frac{1}{a_n}$ puó divergere o essere non limitata e non regolare.
Teoremi del confronto con dimostrazione. Applicazioni:
Teorema. Se $a_n \to 0$ e (b_n) é limitata, allora $a_n b_n \to 0$.
La successione geometrica.

Esercizi su forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$.
Il problema del confronto di infiniti. Si suggeriscono i seguenti esercizi.

Giovedí 22 ottobre - 2 ore. Esercizi:
1 Si imostri che per ogni $x > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

2 Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+n-1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^2+1} - \sqrt{n^4+n-1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4+n-1}$$

3 Data la sucessione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$
i) si dimostri che é crescente;
ii) si dimostri che la sucessione $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ é decrescente;
ii) si dimostri che la successione a_n é limitata;
iii) si dimostri che la successione a_n é convergente;
iv) detto e il suo limite, si trovino una approssimazione razionale per eccesso e una per difetto, che approssimino e a meno di 10^{-3}
4 La scrittura decimale dei numeri reali.
5 Sia $\alpha > 0$, si consideri la seguente successione definita per induzione
$$a_1 = \alpha, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}})$$
per $\alpha > 1$, si dimostri:
i) $1 \le a_n \le \alpha$ per ogni n;
ii) $a_n < a_{n-1}$ é equivalente a $a_n > \alpha^2$;
iii) $a_n > \alpha^2$ per ogni n;
iv) (a_n) é decrescente;
v) (a_n) é convergente;
vi) detto a il lmite di (a_n), si provi che $a = \sqrt{\alpha}$.
Si dimostri la convergenza della sucessione nel caso $0 < \alpha < 1$ e se ne calcoli il limite.

Applicazioni dei criteri del confronto: due criteri che permettono di confrontare con la successione geometrica:
Criterio della radice per successioni (con dimostrazione).
Sia (a_n) una successione a termini non negativi.
1) Si dimostri che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$
$\Rightarrow$
i) $\exists\, q < 1$ tale che $a_n < q^n$ definitivamente;

ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Si dimostri che $\lim \sqrt[n]{a_n} = l > 1$
$\Rightarrow$
i) $\exists\, q > 1$, tale che $a_n > q^n$ definitivamente;
ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Criterio del rapporto per successioni (con dimostrazione).
Sia (a_n) una successione a termini non negativi.
1) Si dimostri che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$
$\Rightarrow$
i) $\exists\, q < 1$, $K > 0$ tali che $a_n < Kq^n$ definitivamente;
ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) Si dimostri che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$
$\Rightarrow$
i) $\exists\, q > 1$, $K > 0$ tali che $a_n > Kq^n$ definitivamente;
ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Applicazioni del criterio del rapporto alla dimostrazione di :
per ogni $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Venerdí 23 ottobre - 2 ore.

Successioni di Cauchy. Teorema con dimostrazione: Ogni soccessione convergente é di Cauchy. Osservazione sull'equivalenza della proposizione: *Ogni successione di Cauchy é convergente* e dell'assioma dell'estremo superiore. Teorema: In $\mathbb{R}$ una successione é convergente se e solo se é di Cauchy.

Serie; serie convergenti, divergenti, non regolari con esempi. La serie geometrica.
Serie resto. Osservazioni: una serie e tutte le sue serie resto hanno lo stesso carattere.

Linearitá della somma di una serie, con dimostrazione.
Osservazioni sulla serie prodotto: conoscendo il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e di $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, nulla si puó dire sul carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$. Esempi
1 Siano $a_n = \frac{n+(-1)^n n}{2}$ e $b_n = \frac{n-(-1)^n n}{2}$. Si provi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ divergono a $+\infty$, mentre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge (a 0).
2 Sia $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Si dimostrerá (utilizzando il criterio di Leibniz) che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ invece diverge.

3 Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi, si provi che se le due serie convergono, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge, ma, in genere non é vero che se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a S e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge a T, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge a ST. Si puó solo affermare $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge $a \leq ST$.
Dimostrazione Suggerimento: si dimostri per induzione che

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq (a_0 + a_1 + ... + a_n)(b_0 + b_1 + ... + b_n)$$

Esempio $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $b_n = (\frac{1}{3})^n$, $a_n b_n = (\frac{1}{6})^n$,
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a 2, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge a $\frac{3}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge a $(\frac{6}{5}) \neq 2\frac{3}{2} = 3$

Condizione necessaria per la convergenza, con dimostrazione. Esempi di serie che soddisfano la condizione necessaria, ma non sono convergenti.

Regolaritá delle serie a termini positivi, con dimostrazione.
Convergenza assoluta. Teorema con dimostrazione: se una serie converge assolutamente, allora converge. Non vale invece il viceversa.

Serie a temini positivi: criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto e della radice, tutti con dimostrazione:
Criterio del confrono asintotico Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi, tali che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

con $l \in \mathbb{R}$ e $l \neq 0$, allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Applicazioni dei criteri del confronto: due criteri che permettono di confrontare con la serie geometrica: criteri del rapporto e della radice per serie, con dimostrazione:
Criterio della radice .
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
i) se $l < 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge,
ii) se $l > 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$diverge,
iii) se $l = 1$ nulla si puó affemare sul carattere della serie.
Criterio del rapporto
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
i) se $l < 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, ii) se $l > 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$diverge,
iii) se $l = 1$ nulla si puó affemare sul carattere della serie.

Mercoledí 28 ottobre - 2 ore.
La serie armonica generalizzata.
Una formulazione del criterio del confronto asintotico, che si usa negli esercizi.
Criterio del confronto asintotico Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non

negativi. Se

$$a_n = b_n c_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = l$$

con $l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

Nei primi tre esercizi le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con cui si confronta la serie data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é o una serie armonica generalizzata o una serie geometrica.

Esercizio 1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$$

converge perché :

- é almeno definitivamente a termini positivi ;

$$\frac{1}{n^2 - 6n + 10} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}}\right);$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}} = 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Esercizio 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2^n}}$$

diverge, perché:

- é a termini positivi ;

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n2^n}}\right);$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n2^n}} = 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Esercizio 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2^n}$$

converge, perché:
- é a termini positivi ;

$$\frac{1}{n+2^n} = \frac{1}{2^n}(\frac{1}{\frac{n}{2^n}+1});$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n}{2^n}+1} = 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge.

Nel prossimo esercizio la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ con cui si confronta la serie data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é piú semplice dalla serie data, ma il suo carattere deve essere studiato.

Esercizio 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n+n^2}$$

converge perché :
- é a termini positivi ;

$$\frac{n}{4^n+n^2} = \frac{n}{4^n}(\frac{1}{1+\frac{n^2}{4^n}});$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{n^2}{4^n}} = 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n}$$

converge per il criterio del rapporto, infatti.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)4^n}{4^{n+1}n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} < 1$$

Atri due criteri del confrono asintotico con dimostrazione.

1 Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi, tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

allora :
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge .
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge .
e

2 Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi, tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

allora :
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge .
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge .

Il numero e come somma della serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, Osservazione sulla stima dell'errore $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ e dell'errore $e - (1 + \frac{1}{n})^n$.

Serie a termini di segno non costante. Richiamo del criterio di convergenza assoluta.
Esercizio 5 Insieme di convergenza assoluta della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Criterio di Leibniz Sia: data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se:
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;
- (a_n) é decrechente,
allora la serie converge.
Abbozzo di dimostrazione.

Esercizio 6 Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

i) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente;
ii) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ non converge (semlicemente) ;
iii) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ diverge ;
iv) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge semplicemente, ma non converge assolutamente.

Esercizio 7 Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

i) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente;
ii) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ non converge (semlicemente) ;
iii) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ diverge ;
iv) si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge semplicemente, ma non converge assolutamente.

Giovledí 29 ottobre - 2 ore.

Punto di accumulazione di un insieme. Limiti di funzioni. Equivalenza della definizione con la definizione per successioni . Esercizi su verifiche di limiti. Esempi di non esistenza del limite. Limite destro e limite sinistro. Continuitá in un punto. Prolungamento per continuitá.
Verifica della continuitá della funzione :
- $f(x) = x$ in ogni punto;
- $f(x) = \sin x$ in $x = 0$;
- $f(x) = \cos x$ in $x = 0$;
- $f(x) = a^x$ $(a > 0$ in $x = 0$;
- $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1$ in $x = 1$;

Venerdí 30 ottobre - 2 ore.

Teoremi della permanenza del segno: Teoremi sull'algebra dei limiti. Forme indeterminate. Teoremi del confronto con applicazioni.
Il teorema del cambiamento di variabili o del limite della funzione composta.
Siano $f : D_f \rightarrow$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $f[D_f] \subseteq D_g$, e siano x_0 un punto di accumulazione per D_f e y_0 un punto di accumulazione per D_g.
Sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

ed esista

$$\lim_{y \to y_0} g(y)$$

e inoltre: g sia continua in y_0 oppure esista $\delta > 0$, tale che, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \neq x_0$ sia $f(x) \neq y_0$.
Allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x))$$

e risulta

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Il Terema continua a valere se $x_0 = \pm\infty$ oppure $y_0 = \pm\infty$.
Esempio sulla necessitá di tutte le ipotesi:

$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, $x_0 = 0$, $g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ y \neq 0 \\ 0 & \text{se } \ y = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, ma $g(f(x))$ non ammette limite per $x \to 0$, infatti $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \neq \frac{1}{n\pi} \\ 0 & \text{se } \ x = \frac{1}{n\pi} \end{cases}$

Applicazioni del teorema.

Esercizio 1 Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \sin(2x), \quad \lim_{x\to 1} e^{(x-1)}$$

Esercizio 2 Si dimostri la continuitá delle funzioni

$$f(x) = \sin x, \quad \cos x, \quad a^x, \quad \log_a x$$

in ogni punto del loro dominio.

Confronto di infiniti e di infinitesiomi. infiniti e infinitesimi equivalenti. La gerarchia degli infiniti.

Esercizio 3 Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 - x^2, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3+x}, \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-x}x$$

Esercizio 4 Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x}$$

Confronto di infinitesimi: i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Applicazioni di questi limiti allo studio del carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{n}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n})(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Esercizio 5 Si studi il carttere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}}$$

Mercoledí 4 novembre - 2 ore.
Esercizi: dimostrare che

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Definizione di area del cerchio di raggio 1 e di lunghezza della circonferenza di raggio 1.
Esercizio: dimostrare che l'area é π e la lunghezza é 2π.
Esercizi: calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{10}(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{10^x-1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

se x é la misura in gradi degli angoli.
Limiti e continuitá delle funzioni della forma

$$f(x)^{g(x)}$$

Esercizi.

Giovedí 5 novembre - 2 ore.
Funzioni continue in un insieme. Funzioni Lipschitziane in un intervallo. Uniforme continuitá. Esempi.
Teorema di esistenza degli zeri, con dimostrazione.
Teoremi di esistenza dei valori intermedi, con dimostrazione.
Caso degli intervalli aperti o non limitati. Teorema di esistenza delle radici dei polinomi di grado dispari.
Teorema di Weierstrass, con dimostrazione.
Esercizi e controesempi.

Venerdí 6 novembre - 2 ore.
Definizione di insieme chiuso. Osservazioni sulle ipotesi del teorema di Weierstrass.
Esercizi:
-Teorema di esistenza di un punto fisso per le funzioni continue

$$f:[a,b]\to[a,b]$$

con dimostrazione (applicazione del teorema di esistenza degli zeri)
Unicitá del punto fisso, nel caso in cui le funzioni siano contrazioni (e cioé siano funzioni Lipschitziane con costante di Lipschitz strettamente minore di 1), con dimostrazione.
- Teorema: le funzioni monotone in un intervallo hanno solo discontinuitá a salto, con dimostrazione. (adattamento della dimostrazione sulla regolaritá delle sucessioni monotone)

- Teoremi sulla monotonia delle funzioni invertibili, continue in un intervallo, con dimostrazione (applicazione del teorema dei valori intermedi).
Teorema sulla continuitá delle funzioni inverse di funzioni (invertibili), continue in un intervallo, con dimostrazione (applicazione degli ultimi due teoremi).
Esempi di funzioni non continue, che sono funzioni inverse di funzioni continue.
Continuitá di

$$\sqrt[n]{x}, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x$$

Esercizi.

Mercoledí 11 novembre - 2 ore.
Esercizi di preparazione all'esonero.

Teorema. $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi equivalenti per $x \to x_0$ se e solo se $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
I limiti notevoli e le formule di Mc Laurin di ordine 1 con il resto di Peano di $\sin x$, e^x, $\log(x+1)$.
Definizione di derivata di una funzione in un punto.
Teorema. Una funzione derivabile in un punto é anche continua in quel punto.
Definizione di retta tangente il grafico di una funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.
Formula di Taylor di ordine 1 e centro x_0, con il resto di Peano.
Caratterizzazione della retta tangente: La retta tangente il grafico di una funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$ é l'unica retta che soddisfa la formula di Taylor di ordine 1 e centro x_0, con il resto di Peano.
Derivata delle funzioni elementari.

Giovedí 12 novembre - 2 ore.
La funzione lineare $df(x_0)$ (differenziale). La derivata come matrice associata a $df(x_0)$.
Linearitá della derivata. Algebra delle derivate. Teorema sulla derivata della funzione composta con dimostrazione e teorema sulla derivata della funzione inversa.
La funzione derivata.
Esercizi
Esercizi di preparazione all'esonero.

Venerdí 13 novembre - 2 ore.
Primo esonero.

Mercoledí 18 novembre - 2 ore.
Esercizi: insieme di derivabilitá di

$$\sqrt{|x|}, \qquad \arcsin x, \qquad x^n \sin\frac{1}{x} \quad n = 1, 2, 3 \qquad f(x)^{g(x)}$$

Punti di estremo assoluto e locale.
Proprietá globali di una funzione e loro conseguenze sul segno della derivata nei punti di derivabilitá:
- derivata delle funzioni costanti;
- derivata delle funzioni monotone derivabili;
- teorema di Fermat con dimostrazione.
Definizione di primitiva e di integrale indefinito, prime proprietá .

Proprietá delle funzioni derivabili in un intervallo:
Teoremi di Rolle e di Lagrange con dimostrazione.
Applicazioni del Teorema di Lagrange:
- caratterizzazione delle funzioni costanti e delle funzioni derivabili e monotone in un intervallo;
- forma dell'integrale indefinito di una funzione definita in un intervallo;
- limite della derivata e derivata nel punto.

Generalizzazioni del teorema di Lagrange: il teorema di Cauchy con dimostrazione.

Giovedí 19 novembre - 2 ore.
Derivate successive. Funzioni di classe $C^n(I)$ e $C^\infty(I)$.
Derivate successive delle funzioni elementari. Osservazioni sulle derivate successive delle funzioni elementari: primi esempi di equazioni differenziali lineari, omogenee e non omogenee del primo e del secondo ordine.
Esercizi:
1) Derivata della funzione $f(x) = \log|x|$
2) si dica in qual punti del dominio esistono la derivata prima e la derivata seconda della funzione $f(x) = x|x|$.
Applicazioni del teorema di Cauchy:
1) Teoremi di de l'Hospital, con dimostrazione nel caso $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$
2) Formula di Taylor di ordine 1 con il resto di Lagrange con dimostrazione.

Venerdí 20 novembre - 2 ore.
Non c'é stata lezione.
Martedí 24 novembre - 2 ore. Recupero lezione di Venerdí 20 novembre

Mercoledí 25 novembre - 2 ore.
Polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0. Polinomio di Mc Laurin.
Polinomi di Mc Laurin di grado n delle funzioni

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \log(1+x)$$

Proprietá del polinomio di Taylor:
- proprietá nel punto x_0;
- proprietá in un intorno del punto x_0: la formula di Taylor di ordine n con il resto di

Peano.
Applicazioni della formula di Taylor con il resto di Peano:
- calcolo di forme indeterminate:
- classificazione dei punti critici attraverso il segno della derivata seconda nel punto, o, se questa é nulla, della prima derivata nonnulla , con dimostrazione. Esempi e controesempi: Classificazione del punto critico $x_0 = 0$
per le funzioni:

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$
$$f(x) = x^n \sin\frac{1}{x} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizi.

Giovedí 26 novembre - 2 ore.

Caratterizzazione del polinomio di Taylor di grado n: il polinomio di Taylor di grado n é l'unico polinomio di grado n che soddisfa la formula di Taylor di ordine n.
Applicazioni:
- Formula di Mc Laurin di ordine n della funzione composta $h(x) = g(f(x))$ dove g é di classe $\mathbb{C}^n([-a, a])$ e f di classe $\mathbb{C}^n([-b, b]$ e $f(0) = 0$. Esempi ed esercizi: Formula di Mc Laurin di ordine 3 di

$$\log(1 - x), \quad \log(1 + x^2), \quad \log(\cos x), \quad e^{\sin x} - 1$$

- Formula di Taylor e derivate. Formula di Taylor di ordine $n - 1$ della funzione derivata di una funzione data di classe $\mathbb{C}^n(I)$. Esempi ed esercizi: formula di Mc Laurin di

$$\frac{1}{1+x} \quad \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1+x^2}$$

- Formula di Taylor e primitive: Formula di Taylor di ordine $n+1$ di una funzione primitiva di una funzione data di classe $\mathbb{C}^n(I)$. Esempi ed esercizi: formula di Mc Laurin di

$$\arctan x$$

Venerdí 27 novembre - 2 ore.
Il resto di Lagrange. Applicazioni:
- Approssimazioni per eccesso e per difetto di funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche con funzioni polinomiali, stima dell'errore.
- Cenni sulla serie di Taylor e sulla sviluppabilitá in serie di Taylor. Sviluppabilitá in serie di McLaurin della funzione e^x .

Mercoledí 2 dicembre - 2 ore.

Primitive, integrale indefinito $\int f(x)\,dx$.

Teorema: Struttura dell'integrale indefinito di funzioni definite in un intervallo.

Metodi di ricerca di una primitiva:

- Uso della linearitá della derivata. Esercizi. Decomposizione in somma

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx \quad \int \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}dx$$

- Integrazione per sostituzione 1: Integrali "immediati".

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy =_{|y=\phi(x)}$$

Esercizi:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx, \quad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi e grado $Q(x) \leq 2$.

-Integrazione per parti.

Esercizi:

$$\int xe^x\,dx, \quad \int x\sin x\,dx \quad \int x\cos x\,dx \quad \int P(x)e^x\,dx, \quad \int P(x)\sin x\,dx \quad \int P(x)\cos x\,dx$$

$$\int x\log, dx, \quad \int x\arctan x\,dx, \quad \int P(x)\log, dx, \quad \int P(x)\arctan x\,dx$$

$$\int e^x\cos x, dx, \quad \int e^x\sin x\,dx$$

$$\int \sin^2 x\,dx, \quad \int \cos^2 x\,dx$$

Esercizi.

Giovedí 3 dicembre - 2 ore.

Le funzioni iperboliche $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, identitá fondamentale, grafici, invertbilitá e funzioni inverse $\mathrm{settsinh}\, x$, $\mathrm{settcosh}\, x$ e loro espressione.

- Integrazione per sostituzione 2. Sia $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione invertibile e derivabile, allora

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt_{|t=\phi^{-1}(x)}$$

Esercizi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Venerdí 4 dicembre - 2 ore.

Integrale definito.

Misura e sue proprietá. Misura (area) di sottoinsiemi del piano: misure per difetto e per eccesso . Definizione di misura come estremo superiore delle misure per difetto ed estremo inferiore delle misure per eccesso nel caso in cui i due estremi coincidano. Esempio: l'aea del cerchio.

Applicazione alla misure di "sottografici" di funzioni limitate, positive, definite in un intervallo chiuso e limitato. Approssimazioni per difetto e per eccesso del sottografico con "plurirettangoli"

Caso generale: funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato, limitate, non necessariamente di segno costante. Partizioni di un 'intervallo. Somme integrali inferiori e superiori. Definizione di integrale definito e di funzione integrabile in un intervallo chiuso e limitato. Esempi e controesempi: le funzioni costanti, costanti a tratti, la funzione di Dirichlet. Proprietá di monotonia delle somme integrali superiori e inferiori. Caratterizzazione delle condizione di integrabilitá. Le somme di Cauchy- Riemann.

Teorema: Integrabilitá delle funzioni monotone, con dimostrazione.

Mercoledí 9 dicembre - 2 ore.

Teorema: Integrabilitá delle funzioni Lipschitziane, con dimostrazione.

Uniforme continuitá. Teorema: Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato é uniformemente continua. Come per il Teorema di Wierestrass, il teorema continua a valere se si suppone che la funzione sia definita nell'unione di un numero finito di intervalli chiusi e limitati.

Teorema: Integrabilitá delle funzioni continue, con abbozzo di dimostrazione.

Esercizi:

- Integrabilitá delle funzioni limitate in un intervallo chiuso e limitato e continue tranne che in un insieme finito, con dimostrazione.
- Integrabilitá delle funzioni limitate in un intervallo chiuso e limitato e continue tranne che in un insieme numerabile, con dimostrazione.
- Integrabilitá delle funzioni limitate in un intervallo chiuso e limitato e monotone tranne che in un insieme finito o numerabile, con dimostrazione.

Proprietá dell'integrale definito:

- linearitá;
- addittivitá;
- monotonia;
- il valore assoluto dell'integrale l'integrale del valore ssoluto.

Giovedí 10 dicembre - 2 ore.

Definizioni e proprietá di $\int_a^a f(x)$ e $\int_b^a f(x)dx$ con $a < b$.

Esercizi.

Teoremi della media integrale con dimostrazione.

Teorema fondamentale del calcolo integrale con dimostrazione.

Osservazioni:
- Se $f(x)$ é continua in un intervallo allora $\int f(x)\,dx \neq \emptyset$
- Se $f(x)$ é continua in $[a,b]$ e $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>Venerdí 11 dicembre - 2 ore.</u>

Teorema del cambiamento di variabili negli integrali definiti. Se $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ é una funzione invertibile e derivabile, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))|\phi'(t)|\,dt$$

Esercizi:
- Area della parte di piano compresa tra il grafico di due funzioni continue e limitate definite in un intervallo.
- Studio di funzioni integrali. Si abbozzi il grafico delle seguenti funzioni; sono richiesti dominio, segno, monotonia, concavitá e convessitá, limiti.

1

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

2

$$I(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Osservazione sulll'analogia tra la convergenza e la divergenze delle serie armonica generalizzata e la convergenza e la divergenze per $x \to +\infty$ della funzione $I(x)$.

3

$$I(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

4

$$I(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

5

$$I(x) = \int_0^x e^{-t}\sqrt[3]{t}\,dt$$

6 Deviazione standard e confronto tra quadrato della media e media del quadrato di una funzione.

Mercoledí 16 dicembre - 2 ore. Richiami su applicazioni ed equazioni lineari Nucleo di una applicazione lineare, Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare. Gli spazi vettoriali $\boldsymbol{C}^1(I)$, $\boldsymbol{C}^2(I), ..\boldsymbol{C}^n(I)$, funzioni linearmente indipendenti, matrice Wronskiana e suo determinante.
Equazioni differenziali. Soluzioni, integrale generale.
Equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee, struttura degli integrale generali.
Equazioni lineari del primo ordine. Problema di Cauchy, teorema di esistenza ed unicitá "in grande" delle soluzioni del problema di Cauchy.
Soluzione delle equazioni lineari del primo ordine omogenee: metodo della separazione delle variabili. Nel caso dei coefficienti costanti, polinomio ed equazione caratteristica.
Soluzione delle equazioni lineari del primo ordine non omogenee: metodo del "fattore integrante" . Osservazione sulla forma della soluzione particolare della equazione non omogenea e illustrazione del metodo della variazione delle costanti per la ricerca di una soluzione dell'equazione non omogenea, una volta sia noto l'integrale generale della non omogenea. Nel caso dei coefficienti costanti, osservazione sulla forma della soluzione particolare della equazione non omogenea e illustrazione del metodo di somiglianza.
Esercizi.

Equazioni lineari del secondo ordine. Problema di Cauchy, teorema di esistenza ed unicitá "in grande" delle soluzioni del problema di Cauchy.
Teorema: L'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine omogenea é uno spazio vettoriale di dimensione 2, con dimostrazione.

Giovedí 17 dicembre - 2 ore. Ricerca di due soluzioni linearmente indipendenti di una equazione lineare del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti: polinomio caratteristico, caso del discriminante ≥ 0.

Richiami sui numeri complessi. Il complesso coniugato. Limiti di successioni nel campo complesso. Serie numeriche nel campo complesso, convergenza e convergenza assoluta. Polinomi, serie di potenze. e^z e sue proprietá, forma di Eulero dei numeri complessi, forma di Eulero del complesso coniugato.
"Derivata" di una funzione di variabile complessa a valori complessi, il caso $e^{\lambda z}$.
Soluzione complesse di un'equazione differenziali lineare.

Ricerca di due soluzioni (reali) linearmente indipendenti di una equazione lineare del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti nel caso del discriminante < 0.
Esercizi.

Venerdí 18 dicembre - 2 ore.
Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t).$$

Nel caso in cui sia noto l'integrale generale dell'omogenea: ricerca di una soluzione con il metodo della variazione delle costanti.
Esercizio. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}$$

Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti : ricerca di una soluzione con il metodo di somiglianza.
1.- Nel caso in cui

$$f(t) = P(t)$$

con $P(t)$ un polinomio di grado n, la soluzione si cerca della forma

$$\overline{y}(t) = x^r Q(t)$$

dove $Q(t)$ é un polinomio di grado n e $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 2$ é la molteplicitá di 0 come radice del polinomio caratteristico.
2.- Nel caso in cui

$$f(t) = P(t)e^{\alpha t}$$

con $P(t)$ un polinomio di grado n, la soluzione si cerca della forma

$$\overline{y}(t) = x^r Q(t)e^{\alpha t}$$

dove $Q(t)$ é un polinomio di grado n e r é la molteplicitá di α come radice del polinomio caratteristico.
3.- Nel caso in cui

$$f(t) = P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)$$

con $P_1(t),\ P_2(t)$, polinomi, la soluzione si cerca della forma

$$\overline{y}(t) = x^r(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$$

dove $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ sono due polinomi con grado $Q_1(t) =$ grado $Q_2(t) =$ massimo dei gradi di $P_1(t)$ e $P_2(t)$ e $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 1$ é la molteplicitá di $\pm i\beta$ come radici del polinomio caratteristico.
4.- Caso generale: nel caso in cui

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))$$

la soluzione si cerca della forma

$$\overline{y}(t) = x^r e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$$

dove $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ sono due polinomi con grado $Q_1(t) =$ grado $Q_2(t) =$ massimo dei gradi di $P_1(t)$ e $P_2(t)$ e r é la molteplicitá di $\alpha \pm i\beta$ come radici del polinomio caratteristico.
Esercizi.

Giovedí 7 gennaio - 2 ore. Esercizi sulle equazioni differenziali del secondo ordine.

Topologia in $\mathbb{R}^2$ (e $\mathbb{R}^3$). Intorno sferico di un punto. Punti interni, esterni e di frontiera per un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$).
Insiemi limitati, insiemi aperti, insiemi chiusi. Operazioni insiemistiche su insiemi aperti e chiusi. Frontiera di un insieme.
Insiemi connessi per archi.

Venerdí 8 gennaio - 2 ore. Esercizi di preparazione all'esonero.

Funzioni di una variabile a valori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Sostegno. Limiti e continuitá. l'algebra dei limiti. limite della funzione composta.
Curve semplici, curve chiuse.

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, +\infty[$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, +\infty[$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Mercoledí 13 gennaio - 2 ore. Esercizi di preparazione all'esonero.

Il vettore derivato. Curve derivabili e curve regolari. Esempio di curva non regolare:

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Curve regolari a tratti.
Cambiamenti di parametrizzazione. Curve equivalenti.
Curve rettificabili. Definizione e formula, con dimostrazione, della lunghezza di un arco di curva regolare a tratti. Teorema, con dimostrazione: la lunghezza di un arco di curva regolare é invariante per cambiamenti di parametrizzazione.

Giovedí 14 gennaio - 2 ore.
Funzioni di due variabili reali a valori reali. Grafici e curve di livello. Esempi. Funzioni

costanti rispetto ad una variabile. Funzioni a simmetria radiale.
Limiti e continuitá. L'algebra dei limiti. I teoremi del limite per le funzioni composte.
Esempi di forme indeterminate.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}]$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}]$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}]$$

Utilizzo delle coordinate polari nel calcolo dei limiti.
Venerdí 15 gennaio - 2 ore. Secondo esonero.

Mercoledí 20 gennaio - 2 ore.

Teoremi Teorema di Weierstrass. Teorema di esisenza degli zeri. Studio del segno di una funzione continua.
Derivate parziali, derivabilitá, gradiente. Derivate direzionali. Derivabilitá in $(0,0)$ di

$$f(x,y) = x\sqrt{y}$$

Definizione di piano tangente, definizione di differenziale. Differenziabilitá. Relazione tra il differenziale e il gradiente.
Teorema: Se $f(x,y)$ é differenziabile in un punto (x_0,y_0), allora é anche continua Il vicecersa é falso.
Esempio:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Teorema: Se $f(x,y)$ é differenziabile in un punto (x_0,y_0), allora é anche derivabile. Il vicecersa é falso.
Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}]$$

Teorema: Se $f(x,y)$ é differenziabile in un punto (x_0,y_0), allora in quel punto ammette derivata lungo ogni direzione. Il vicecersa é falso.
Formula del gradiente per le derivate direzionali delle funzioni differenziabili. La formula non vale per le funzioni non differenziabili.
Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}]$$

Giovedí 21 gennaio - 2 ore. Esercizi.
Direzione di massima e minima crescita di una funzione; ortogonalitá del gradiente con le curve di livello.
Derivate seconde. La forma quadratica differenziale secondo. Matrice Hessiana.

Venerdí 22 gennaio - 2 ore. Esercizi.