

A chi fosse interessato ad una trattazione piú approfondita dei numeri reali, si consigliano, tra le numerose note che si trovano in rete:

1. G. Mauceri: I numeri reali

Nella prima parte di queste note, i numeri reali sono introdotti in modo assiomatico. Il sottoinsieme dei numeri naturali é definito in modo rigoroso come il piú piccolo insieme induttivo contenuto nei reali. Quindi i numeri interi sono definiti come la chiusura, rispetto all'esistenza dell'opposto, dei naturali (nei reali) e i numeri razionali come la chiusura, rispetto all'esistenza del reciproco, degli interi.

Una trattazione assiomatica dei numeri reali non garantisce però la "concretezza" di questa struttura e cioè l'esistenza di un insieme che soddisfi gli assiomi.

Nella seconda parte delle note, si dimostra "l'unicità" dei numeri reali e si forniscono due modelli: gli allineamenti decimali e i tagli di Dedekind.

Nelle seguenti note, é presentata una terza costruzione dei numeri reali: le successioni di Cauchy di numeri razionali.

2. A. Figá Talamanca: Appunti sui numeri reali

Le successioni di Cauchy possono essere definite anche in insiemi che non siano dotati né della struttura di campo né di una relazione d'ordine, ma nelle quali sia definita una distanza. In queste strutture, non ordinate, l'ipotesi della convergenza di tutte le successioni di Cauchy garantisce una sorta di "completezza" della struttura, analoga alla "continuitá" che i numeri reali hanno grazie all'assioma dell'estremo superiore.

La prima costruzione considera intuitivo il concetto di numero naturale, le ultime due considerano intuitivo quello di numero razionale. Questi insiemi numerici devono quindi essere introdotti in modo autonomo, prescindendo dall'esistenza dei numeri reali.

Le seguenti note contengono la costruzione dei numeri interi e razionali a partire dalla sola esistenza dei numeri naturali, e quindi senza l'utilizzo delle nozioni di opposto e reciproco. Argomenti di questo tipo sono trattati nei corsi di Algebra.

3. A.D'Andrea: Costruzione dei principali insiemi numerici

Infine, nell'ultima nota i numeri naturali sono definiti in modo assiomatico.

4. A.D'Andrea: Assiomi di Peano e proprietá dei numeri naturali

Il problema della non contraddittorietá degli assiomi e della esistenza di un modello per un insieme cosí "naturale", come quello dei numeri naturali, riguarda i fondamenti della matematica e viene trattato nei corsi di Logica matematica.