LABORATORIO DI PROGRAMMAZIONE E CALCOLO

Corso Prof. Biancamaria Della Vecchia (I canale) a.a. 2015/2016

Foglio di esercizi (N. 11)

1. Data la funzione $f(x) = x - \exp(x) + 2$,

   i) dire quale tra i seguenti metodi di punto fisso converge alla radice di f (motivare la risposta)

   $$a) \begin{cases} x_{k+1} = \exp(x_k) - 2, & k \geq 0 \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_{k+1} = \ln(x_k + 2), & k \geq 0 \\ x_0 \in [1, 2]. \end{cases}$$

   ii) scrivere in C++ l'algoritmo che implementa il metodo convergente.

2. Si consideri la funzione
   $$f(x) = x^2 - 2, \; x \geq 0.$$

   i) Determinare quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per approssimare la radice di f con la certezza di almeno 3 cifre decimali corrette;

   ii) descrivere il funzionamento dell'algoritmo di bisezione mediante un programma C++;

   iii) descrivere l'algoritmo di Erone

3. Si consideri la funzione
   $$f(x) = x^2.$$
   Scrivere il polinomio interpolante di Lagrange di grado 2 e 3 su nodi equidistanti in $[-1, 1]$ relativo alla funzione f. Stimare l'errore e commentare i risultati.

4. Risolvere i due sistemi di equazioni lineari
   $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 0.999y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 1.0001y = 0 \end{cases}$$
   e commentare i risultati. Descrivere brevemente il fenomeno del malcondizionamento.

5. Scrivere una programma strutturato mediante funzioni che calcola mediante il metodo dei coefficienti indeterminati il polinomio interpolante di Lagrange p_n di grado n, $n = 2, 3, 5$, relativo alla funzione $f(x) = e^x$ su nodi equidistanti in $[0, 1]$. Tracciare il grafico di f e p_n in $[0, 1]$. Calcolare a mano p_1 e p_2 e stimare il corrispondente errore.

6. Scrivere un programma strutturato mediante funzioni per approssimare l'integrale
   $$I = \int_0^1 e^x dx$$
   mediante la formula dei trapezi e di Cavalieri-Simpson. Stimare il corrispondente errore.

7. Si consideri la funzione $f(x) = \exp(x) - x$ in $[-1, 1]$. Stimare l'errore di approssimazione mediante il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in $x_0 = 0$.

8. Sia
   $$I = \int_{-1}^2 x \, dx.$$
   Calcolare numericamente l'integrale I mediante le formule dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, stimarne il corrispondente errore e commentare i risultati.