LABORATORIO DI PROGRAMMAZIONE E CALCOLO

Corso Prof. Biancamaria Della Vecchia (I canale) a.a. 2015/2016

Foglio di esercizi (N. 9)

1. Scrivere un programma strutturato in funzioni che risolve con il metodo delle eliminazioni di Gauss con pivot parziale il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 7x + z = 8 \\ y + \dfrac{1}{2}z = -\dfrac{1}{2} \\ 5y + 12z = 7 \end{cases}$$

   scrivendo tutte le matrici (e i termini noti) della riduzione, passaggio per passaggio, fino al calcolo della soluzione.

   Soluzione del sistema di equazioni: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

2. Si consideri il sistema di equazioni lineari dell'esercizio precedente

   (a) Si calcoli la norma infinito della matrice A del sistema di equazioni (Def. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$);

   (b) si scriva esplicitamente la matrice di iterazione del metodo di Jacobi per la soluzione del sistema;

   (c) si calcoli a mano il vettore $\mathbf{x}^{(2)}$ ottenuto dal metodo di Jacobi partendo da $\mathbf{x}^{(0)}$ uguale al vettore nullo;

   (d) si stimi a priori il numero di iterazioni necessarie per ottenere una soluzione che in norma infinito disti da quella esatta per meno di 10^{-2}.

3. Si consideri la funzione $f(x) = e^x + x^3$.

   (a) Dimostrare che f possiede una sola radice nell'intervallo $[-1, 0]$ e che non ne ammette altre altrove;

   (b) determinare quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per approssimare la radice con la certezza di almeno quattro cifre decimali corrette;

   (c) scrivere un algoritmo che stimi la soluzione con almeno due metodi;

4. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$.

   (a) Dimostrare che f possiede una sola radice nell'intervallo $[-1, 0]$ e che non ne ammette altre altrove;

   (b) determinare quante iterazioni del metodo di bisezione sono necessarie per approssimare la radice con la certezza di almeno quattro cifre decimali corrette;

   (c) scrivere un algoritmo che stimi la soluzione con almeno due metodi.

5. Scrivere un programma strutturato in funzioni che

   (a) legga un intero positivo $n \leq 10$, una tolleranza ε, due vettori reali x_0 e y_0 a n componenti;

   (b) generi una matrice $A(m \times n)$definita dalle formule

$$A(i,i) = 1, \;\; A(i,j) = 0.1, \;\; 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j \leq n, \;\; j \neq i;$$

   (c) generi per $k = 0, 1, 2, \ldots$ le seguenti successioni

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k - y_k \\ y_{k+1} &= Ay_k - x_k \\ z_{k+1} &= \|x_{k+1} + y_{k+1}\|_\infty, \end{aligned}$$

   con $\|\cdot\|$ norma del massimo;

   (d) arresti le iterazioni se $z_k < \varepsilon$ oppure se k raggiunge il valore di 100;

   (e) stampi i vettori x_k, y_k finali, oltre al numero di iterazioni effettuate.