Compito del 16 settembre 2016
Prof. S. Caprara

In ciascun esercizio, spiegate brevemente il procedimento che intendete usare.

1. Cifre significative. Errori e loro propagazione.
Sono state misurate le tre grandezze $\ell = (3{,}99 \pm 0{,}48)\,\mathrm{m}$; $a = (3{,}08 \pm 0{,}26)\,\mathrm{m/s^2}$; $M = (1{,}255 \pm 0{,}022)\,\mathrm{kg}$. Tutti gli errori sono stime dell'errore massimo.
(a) Riscrivete ℓ, a, e M in maniera appropriata, tenendo per i rispettivi errori una sola cifra significativa, troncando e arrotondando dove è necessario.
(b) Calcolate gli errori relativi su ℓ, a, e M (con due cifre significative).
(c) Le tre grandezze vengono usate per calcolare

$$\mathcal{K} = Ma\ell$$

Determinate la migliore stima di $\mathcal{K}$, l'errore relativo e assoluto su $\mathcal{K}$.

2. Rigetto dei dati.
Eseguendo $N = 8$ misure dell'allungamento ℓ di una molla sotto l'azione di una forza fissata, si sono trovati i valori (in cm):

$$2{,}98; \quad 3{,}02; \quad 2{,}99; \quad 3{,}00; \quad 5{,}00; \quad 3{,}03; \quad 2{,}97; \quad 3{,}01.$$

(a) Calcolate la media $\overline{\ell}$ e la deviazione standard σ_ℓ delle misure ottenute (con due cifre significative e usando $N-1$ al denominatore).
(b) Individuate la misura più anomala ℓ_{sos} e discutete se tale misura può essere rigettata in base al criterio di Chauvenet.
(c) Dopo aver scartato la misura anomala, ricalcolate la media $\overline{\ell}\,'$ e la deviazione standard σ'_ℓ (con due cifre significative) delle 7 misure rimanenti e commentate il risultato ottenuto.

3. Media pesata.
Quattro gruppi diversi hanno misurato un tempo t, ottenendo i risultati (in secondi):

$$480 \pm 4; \quad 468 \pm 6; \quad 448 \pm 8; \quad 400 \pm 20.$$

Ciascuna misura è il valore medio determinato dal gruppo corrispondente e l'incertezza attribuita è la deviazione standard.
(a) Trovate la media pesata t_{wav} dei quattro valori e la sua incertezza σ_{wav} (con tre cifre significative).
(b) Ricalcolate la media pesata t'_{wav} dei primi tre valori e la sua incertezza σ'_{wav} (con tre cifre significative). Ha senso includere l'ultima misura?

4. Metodo dei minimi quadrati. Test del χ^2.
Misurando coppie di grandezze dipendenti (x, y), si sono trovati i valori

$$(1, 2); \quad (2, 4); \quad (3; 3); \quad (4; 5).$$

(a) Assumendo che la relazione tra x e y sia di tipo lineare, $y = A + Bx$, determinate la retta che meglio rappresenta i risultati ottenuti, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.
(b) Assumendo che le $N = 4$ misure di y siano tutte caratterizzate da una deviazione standard $\sigma_y = \frac{3}{2}$, calcolate il valore del χ^2 che caratterizza lo scarto tra i valori di y osservati e quelli attesi se vale la relazione lineare trovata con il metodo dei minimi quadrati.
(c) Determinate il numero d di gradi di libertà e il valore $\tilde{\chi}^2_o$ del chi quadrato ridotto, tenendo conto del fatto che le 4 misure sono state utilizzate per determinare i parametri A e B.
(d) Determinate la probabilità $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}^2_o)$ che la variabile chi quadrato ridotto sia maggiore o uguale al valore trovato e dite se è ragionevole che la relazione lineare tra x e y determinata con il metodo dei minimi quadrati descriva effettivamente i risultati osservati, assumendo come significativa la soglia del 5% per il chi quadrato ridotto.

Soluzione del Compito del 14 settembre 2016
Prof. S. Caprara

1. Cifre significative. Errori e loro propagazione.
(a) $\ell = (4{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$; $\quad a = (3{,}1 \pm 0{,}3)\,\mathrm{m/s^2}$; $\quad M = (1{,}26 \pm 0{,}02)\,\mathrm{kg}$.
(b) Si ha

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = 0{,}13; \qquad \frac{\delta a}{a} = 0{,}097; \qquad \frac{\delta M}{M} = 0{,}016.$$

(c) La migliore stima di $\mathcal{K}$ è

$$\mathcal{K} = 4{,}0 \times 3{,}1 \times 1{,}26 = 15{,}6\,\mathrm{N \cdot m}.$$

L'errore relativo su F è

$$\frac{\delta\mathcal{K}}{\mathcal{K}} = \frac{\delta\ell}{\ell} + \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta M}{M} = 0{,}24;$$

allora, la stima dell'errore assoluto su $\mathcal{K}$ è

$$\delta\mathcal{K} = \mathcal{K}\,\frac{\delta\mathcal{K}}{\mathcal{K}} = 3{,}8\,\mathrm{N \cdot m}.$$

Eseguendo gli opportuni troncamenti, $\mathcal{K} = (15 \pm 4)\,\mathrm{N{\cdot}m}$.

2. Rigetto dei dati.
(a) $\overline{\ell} = 3{,}25\,\mathrm{cm}$. Gli scarti sono: $\ell_k - \overline{\ell} =$ -0,27; -0,23; -0,26; -0.25; 1,75; -0,22; -0,28; -0,24 (tutti in cm). Si verifica che la somma degli scarti è nulla. La deviazione standard vale $\sigma_\ell = \sqrt{3{,}5028/7} = 0,71\,\mathrm{cm}$.
(b) La misura più anomala è quella con lo scarto più grande in valore assoluto (= 1,75), cioè $\ell_{sos} = 5{,}00\,\mathrm{cm}$. Si ha

$$t_{sos} = \frac{\left|\ell_{sos} - \overline{\ell}\right|}{\sigma_\ell} = 2{,}46$$

e $P(t \geq t_{sos}) = 1 - P(t \leq t_{sos}) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139$. Allora $n = N \times P(t \geq t_{sos}) = 0{,}1112 < 0{,}5$ e il dato può essere rigettato in base al criterio di Chauvenet.
(c) Dopo aver scartato il dato anomalo si ha $\overline{\ell}\,' = 3,00\,\mathrm{cm}$ e $\sigma'_\ell = \sqrt{0{,}0028/6} = 0,02\,\mathrm{cm}$. La misura è diventata molto più precisa.

3. Media pesata.
(a) I pesi valgono $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{400}$ e la somma dei pesi vale $\frac{1561}{14400}$. Quindi

$$t_{wav} = \frac{\frac{480}{16} + \frac{468}{36} + \frac{448}{64} + \frac{400}{400}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{400}} = \frac{30 + 13 + 7 + 1}{\frac{1561}{14400}} = \frac{734400}{1561} = 470{,}47\,\mathrm{s}; \qquad \sigma_{wav} = \sqrt{\frac{14400}{1561}} = 3{,}04\,\mathrm{s}.$$

(b) Eliminata l'ultima misura la somma dei pesi vale $\frac{61}{576}$ e si ha

$$t'_{wav} = \frac{\frac{480}{16} + \frac{468}{36} + \frac{448}{64}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64}} = \frac{30 + 13 + 7}{\frac{61}{576}} = \frac{28800}{61} = 472{,}13\,\mathrm{s}; \qquad \sigma'_{wav} = \sqrt{\frac{576}{61}} = 3{,}07\,\mathrm{s}.$$

La discrepanza tra le due medie è $|t_{wav} - t'_{wav}| = 1{,}66\,\mathrm{s} < \sigma_{wav}, \sigma'_{wav}$, quindi l'ultima misura non dà un contributo significativo alla media.

4. Metodo dei minimi quadrati. Test del χ^2.
(a) Si ha

x :	1	2	3	4
y :	2	4	3	5
x^2 :	1	4	9	16
xy :	2	8	9	20

Quindi $\bar{x} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = \frac{7}{2}$, $\overline{x^2} = \frac{15}{2}$, $\overline{xy} = \frac{39}{4}$. Allora

$$A = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \bar{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{3}{2}\,, \qquad\qquad B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{4}{5}\,,$$

e la retta dei minimi quadrati è: $y = \frac{3}{2} + \frac{4}{5}x$. Si verifica per sostituzione che essa passa per il punto $(\bar{x};\bar{y}) = (\frac{5}{2};\frac{7}{2})$.
(b) I valori osservati O_k sono i valori di y e i valori attesi E_k sono i valori di $A + Bx$. Si ottiene la tabella

$$\begin{array}{lcccc} O_k : & 2 & 4 & 3 & 5 \\ E_k : & \frac{23}{10} & \frac{31}{10} & \frac{39}{10} & \frac{47}{10} \\ \\ O_k - E_k : & -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{3}{10} \end{array}$$

da cui risulta evidente che la somma degli scarti è nulla. Quindi

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{O_k - E_k}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{4}{5}.$$

(c) Poiché i dati sono stati utilizzati per stimare i due parametri A e B della retta dei minimi quadrati, si ha $d = N - c = 4 - 2 = 2$ e la variabile chi quadrato ridotto vale $\tilde{\chi}^2_o = \tilde{\chi}^2/d = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
(d) Si ha $P_{d=2}(\tilde{\chi}^2 \geq \frac{2}{5}) = 67\%$. Poiché la probabilità ottenuta è largamente superiore alla soglia del 5%, si può affermare che la retta dei minimi quadrati dà una descrizione assai ragionevole dei dati osservati.