Compito di Fisica Generale II del 12 settembre 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1. Una distribuzione di carica a simmetria sferica genera il potenziale elettrostatico

$$V(\boldsymbol{r}) = V_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-a/r}\right),$$

dove $a > 0$ e V_0 sono parametri dimensionali e r è la coordinata sferica radiale, avendo assunto l'origine del sistema di coordinate nel centro di simmetria della distribuzione.

1. Si determini il campo elettrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato dalla distribuzione di carica in esame. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

2. Si determini la densità volumetrica di carica $\rho(\boldsymbol{r})$ associata alla distribuzione in esame.

3. Si determini la carica totale Q della distribuzione in esame.

Esercizio 2. Si consideri la distribuzione di corrente a simmetria cilindrica caratterizzata dalla densità di corrente

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j_0 \frac{R^2}{R_0^2}\left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \text{per } R \leq R_0,$$

e $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$, per $R > R_0$, dove $R_0 > 0$ e j_0 sono parametri dimensionali, R è la distanza dall'asse z, che coincide con l'asse di simmetria della distribuzione, nel sistema di coordinate adottato, e $\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse z.

1. Si determini il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ generato dalla distribuzione di corrente in esame. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ il versore associato alla coordinata cilindrica angolare.

2. In un piano meridiano del sistema di coordinate cilindriche adottato è presente una spira quadrata di lato ℓ, con due lati paralleli all'asse z. Il lato più vicino all'asse z ha distanza $2R_0$ dall'asse. Si calcoli il flusso Φ del campo $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$, determinato al punto precedente, attraverso la spira.

3. Si consideri ora il caso in cui $j_0 = \kappa \cos(\omega t)$ varia nel tempo con pulsazione ω, e κ è una costante dimensionale. Detta $\mathcal{R}_s$ la resistenza della spira, si determini l'intensità $i(t)$ della corrente indotta che circola nella spira.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 17 giugno 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. Il campo cercato ha solo componente radiale

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{V_0 a}{r^2}\,\mathrm{e}^{-a/r},$$

per cui

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{V_0 a}{r^2}\,\mathrm{e}^{-a/r}\,\hat{\boldsymbol{r}}.$$

2. Dall'equazione di Maxwell

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 E_r(r)\right] = \frac{\epsilon_0 V_0 a}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mathrm{e}^{-a/r}\right) = \frac{\epsilon_0 V_0 a^2}{r^4}\mathrm{e}^{-a/r}$$

3. Si ha

$$Q = \int_0^\infty \rho(r)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi\epsilon_0 V_0 a^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-a/r}}{r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\epsilon_0 V_0 a \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a/r}\,d\left(-\frac{a}{r}\right) = 4\pi\epsilon_0 V_0 a.$$

A tale risultato si può arrivare senza calcoli, osservando che per grandi r il potenziale assegnato è quello di un monopolo di carica $4\pi\epsilon_0 V_0 a$.

Esercizio 2.

1. La corrente concatenata con una circonferenza di raggio R perpendicolare all'asse z, con il centro su tale asse, ha intensità

$$i(R) = \int_0^R \left[\boldsymbol{j}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\right](s)\,2\pi s\,\mathrm{d}s.$$

Per $R \le R_0$ si ha

$$i(R) = \frac{2\pi j_0}{R_0^4}\int_0^R s^2\left(R_0^2 - s^2\right)\,s\,\mathrm{d}s = \frac{\pi j_0 R^4}{6R_0^4}\left(3R_0^2 - 2R^2\right).$$

Per $R \to R_0^-$ si ottiene l'intensità totale della corrente associata alla distribuzione in esame,

$$i_{tot} = \frac{\pi j_0 R_0^2}{6}.$$

Per $R > R_0$, $i(R) = i_{tot}$ non dipende più da R. Per simmetria, il campo cercato ha solo componente angolare $B_\theta(R)$, e applicando la legge della circuitazione di Ampère si ha $2\pi R\,B_\theta(R) = \mu_0 i(R)$, da cui

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 i(R)}{2\pi R}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Quindi, per $R \le R_0$,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 j_0 R^3}{12R_0^4}\left(3R_0^2 - 2R^2\right)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e, per $R > R_0$,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 j_0 R_0^2}{12R}\,\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

in accordo con la legge di Biot-Savart.

2. Nella regione di spazio in cui è presente la spira si ha $R > R_0$ e, adottando come normale alla spira il versore $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, si ha

$$\Phi = \int_{2R_0}^{2R_0+\ell} \left[\boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}\right](R)\, \ell \, \mathrm{d}R = \frac{\mu_0 j_0 R_0^2 \ell}{12} \int_{2R_0}^{2R_0+\ell} \frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{\mu_0 j_0 R_0^2 \ell}{12} \log\left(1 + \frac{\ell}{2R_0}\right).$$

3. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha

$$i(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}_s} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\mu_0 R_0^2 \ell}{12\mathcal{R}_s} \log\left(1 + \frac{\ell}{2R_0}\right) \frac{\mathrm{d}j_0}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mu_0 R_0^2 \ell \kappa \omega}{12\mathcal{R}_s} \log\left(1 + \frac{\ell}{2R_0}\right) \sin(\omega t).$$

Il segno della corrente è riferito al verso di percorrenza della spira coerente con la scelta della normale $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.