Compito del 30 giugno 2016
Prof. S. Caprara

In ciascun esercizio, spiegate brevemente il procedimento che intendete usare.

1. Cifre significative. Errori e loro propagazione.
Sono state misurate le tre grandezze $m = (2{,}99 \pm 0{,}37)\,\mathrm{kg}$; $v = (2{,}07 \pm 0{,}19)\,\mathrm{m/s}$; $r = (2{,}455 \pm 0{,}031)\,\mathrm{m}$. Tutti gli errori sono stime dell'errore massimo.
(a) Riscrivete m, v, e r in maniera appropriata, tenendo per i rispettivi errori una sola cifra significativa, troncando e arrotondando dove è necessario.
(b) Calcolate gli errori relativi su m, v, e r (con due cifre significative).
(c) Le tre grandezze vengono usate per calcolare

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Determinate la migliore stima di F, l'errore relativo e assoluto su F.

2. Rigetto dei dati.
Eseguendo $N = 8$ misure del tempo di caduta τ di un grave lungo un piano inclinato, si sono trovati i valori (in secondi):

$$1{,}03; \quad 1{,}00; \quad 0{,}99; \quad 1{,}02; \quad 3{,}00; \quad 0{,}97; \quad 1{,}01; \quad 0{,}98.$$

(a) Calcolate la media $\overline{\tau}$ e la deviazione standard σ_τ delle misure ottenute (con due cifre significative e usando $N-1$ al denominatore).
(b) Individuate la misura più anomala τ_{sos} e discutete se tale misura può essere rigettata in base al criterio di Chauvenet.
(c) Dopo aver scartato la misura anomala, ricalcolate la media $\overline{\tau}'$ e la deviazione standard σ'_τ (con due cifre significative) delle 7 misure rimanenti e commentate il risultato ottenuto.

3. Media pesata.
Quattro gruppi diversi hanno misurato una certa massa M, ottenendo i risultati (in grammi):

$$184 \pm 2; \quad 180 \pm 3; \quad 175 \pm 5; \quad 200 \pm 10.$$

Ciascuna misura è il valore medio determinato dal gruppo corrispondente e l'incertezza attribuita è la deviazione standard.
(a) Trovate la media pesata M_{wav} dei quattro valori e la sua incertezza σ_{wav} (con tre cifre significative).
(b) Ricalcolate la media pesata M'_{wav} dei primi tre valori e la sua incertezza σ'_{wav} (con tre cifre significative). Ha senso includere l'ultima misura?

4. Metodo dei minimi quadrati. Test del $\boldsymbol{\chi^2}$.
Misurando coppie di grandezze dipendenti (x, y), si sono trovati i valori

$$(1, 5); \quad (2, 3); \quad (3; 4); \quad (4; 2).$$

(a) Assumendo che la relazione tra x e y sia di tipo lineare, $y = A + Bx$, determinate la retta che meglio rappresenta
(b) Assumendo che le $N = 4$ misure di y siano tutte caratterizzate da una deviazione standard $\sigma_y = \frac{3}{4}$, calcolate il valore del χ^2 che caratterizza lo scarto tra i valori di y osservati e quelli attesi se vale la relazione lineare trovata con il metodo dei minimi quadrati.
(c) Determinate il numero d di gradi di libertà e il valore $\tilde{\chi}^2_o$ del chi quadrato ridotto, tenendo conto del fatto che le 4 misure sono state utilizzate per determinare i parametri A e B.
(d) Determinate la probabilità $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}^2_o)$ che la variabile chi quadrato ridotto sia maggiore o uguale al valore trovato e dite se è ragionevole che la relazione lineare tra x e y determinata con il metodo dei minimi quadrati descriva effettivamente i risultati osservati, assumendo come significativa la soglia del 5% per il chi quadrato ridotto.

Soluzione del Compito del 30 giugno 2016
Prof. S. Caprara

1. Cifre significative. Errori e loro propagazione.
(a) $m = (3{,}0 \pm 0{,}4)\,\mathrm{kg}$; $v = (2{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{m/s}$; $r = (2{,}46 \pm 0{,}03)\,\mathrm{m}$.
(b) Si ha

$$\frac{\delta m}{m} = 0{,}13; \qquad \frac{\delta v}{v} = 0{,}095; \qquad \frac{\delta r}{r} = 0{,}012.$$

(c) La migliore stima di F è

$$F = \frac{3{,}0 \times (2{,}1)^2}{2{,}46} = 5{,}4\,\mathrm{N}.$$

L'errore relativo su F è

$$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta(v^2)}{v^2} + \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta m}{m} + 2\frac{\delta v}{v} + \frac{\delta r}{r} = 0{,}33;$$

allora, la stima dell'errore assoluto su F è

$$\delta F = F\,\frac{\delta F}{F} = 1{,}8\,\mathrm{N}.$$

Eseguendo gli opportuni troncamenti, $F = (5 \pm 2)\,\mathrm{N}$.

2. Rigetto dei dati.
(a) $\overline{\tau} = 1{,}25\,\mathrm{s}$. Gli scarti sono: $\tau_k - \overline{\tau} =$ -0,22; -0,25; -0,26; -0.23; 1,75; -0,28; -0,24; -0,27 (tutti in secondi). Si verifica che la somma degli scarti è nulla. La deviazione standard vale $\sigma_\tau = \sqrt{3{,}5028/7} = 0,71\,\mathrm{s}$.
(b) La misura più anomala è quella con lo scarto più grande in valore assoluto (= 1,75), cioè $\tau_{sos} = 3{,}00$. Si ha

$$t_{sos} = \frac{|\tau_{sos} - \overline{\tau}|}{\sigma_\tau} = 2{,}46$$

e $P(t \geq t_{sos}) = 1 - P(t \leq t_{sos}) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139$. Allora $n = N \times P(t \geq t_{sos}) = 0{,}1112 < 0{,}5$ e il dato può essere rigettato in base al criterio di Chauvenet.
(c) Dopo aver scartato il dato anomalo si ha $\overline{\tau}' = 1,00\,\mathrm{s}$ e $\sigma'_\tau = \sqrt{0{,}0028/6} = 0,02\,\mathrm{s}$. La misura è diventata molto più precisa.

3. Media pesata.
(a) I pesi valgono $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$ e la somma dei pesi vale $\frac{37}{90}$. Quindi

$$M_{wav} = \frac{\frac{184}{4} + \frac{180}{9} + \frac{175}{25} + \frac{200}{100}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}} = \frac{46 + 20 + 7 + 2}{\frac{37}{90}} = \frac{6750}{37} = 182{,}43\,\mathrm{g}; \qquad \sigma_{wav} = \sqrt{\frac{90}{37}} = 1{,}56\,\mathrm{g}.$$

(b) Eliminata l'ultima misura la somma dei pesi vale $\frac{361}{900}$ e si ha

$$M'_{wav} = \frac{\frac{184}{4} + \frac{180}{9} + \frac{175}{25}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}} = \frac{46 + 20 + 7}{\frac{361}{900}} = \frac{65700}{361} = 181{,}99\,\mathrm{g}; \qquad \sigma'_{wav} = \sqrt{\frac{900}{361}} = 1{,}58\,\mathrm{g}.$$

La discrepanza tra le due medie è $|M_{wav} - M'_{wav}| = 0{,}44 < \sigma_{wav}, \sigma'_{wav}$, quindi l'ultima misura non dà un contributo significativo alla media.

4. Metodo dei minimi quadrati. Test del χ^2.
(a) Si ha

x :	1	2	3	4
y :	5	3	4	2
x^2 :	1	4	9	16
xy :	5	6	12	8

Quindi $\bar{x} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = \frac{7}{2}$, $\overline{x^2} = \frac{15}{2}$, $\overline{xy} = \frac{31}{4}$. Allora

$$A = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \bar{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{11}{2}\,, \qquad\qquad B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -\frac{4}{5}\,,$$

e la retta dei minimi quadrati è: $y = \frac{11}{2} - \frac{4}{5}x$. Si verifica per sostituzione che essa passa per il punto $(\bar{x};\bar{y}) = (\frac{5}{2};\frac{7}{2})$.
(b) I valori osservati O_k sono i valori di y e i valori attesi E_k sono i valori di $A + Bx$. Si ottiene la tabella

O_k :	5	3	4	2
E_k :	$\frac{47}{10}$	$\frac{39}{10}$	$\frac{31}{10}$	$\frac{23}{10}$
$O_k - E_k$:	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$

da cui risulta evidente che la somma degli scarti è nulla. Quindi

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{O_k - E_k}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{16}{5}.$$

(c) Poiché i dati sono stati utilizzati per stimare i due parametri A e B della retta dei minimi quadrati, si ha $d = N - c = 4 - 2 = 2$ e la variabile chi quadrato ridotto vale $\tilde{\chi}^2_o = \tilde{\chi}^2/d = \frac{8}{5} = 1{,}6$.
(d) Si ha $P_{d=2}(\tilde{\chi}^2 \geq \frac{8}{5}) = 20\%$. Poiché la probabilità ottenuta è largamente superiore alla soglia del 5%, si può affermare che la retta dei minimi quadrati dà una descrizione assai ragionevole dei dati osservati.