Compito di Fisica Generale II del 17 giugno 2016
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Si consideri una distribuzione di carica a simmetria sferica, descritta dalla densità di volume

$$\rho(r) = \frac{K\, r}{a^4}, \quad \text{per } r \le a, \qquad\qquad \rho(r) = 0, \quad \text{per } r > a,$$

dove $a > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza, K è un parametro dimensionale, e r è la coordinata radiale sferica, in un opportuno sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro di simmetria della distribuzione. La distribuzione assegnata è racchiusa in un guscio sferico conduttore, di raggio interno $r_i = 2a$ e raggio esterno $r_e = 3a$, centrato nell'origine del sistema di riferimento adottato [si veda la FIG. 1(a)]. Il guscio sferico è complessivamente scarico.

1. Determinare la carica totale Q_{tot} associata alla distribuzione assegnata, e le densità superficiali di carica σ_i e σ_e sulla faccia interna ed esterna del guscio sferico.

2. Determinare in tutto lo spazio il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato dalla distribuzione assegnata. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

3. Determinare in tutto lo spazio il potenziale elettrostatico $V(r)$ generato dalla distribuzione assegnata, assumendo che esso si annulli all'infinito.

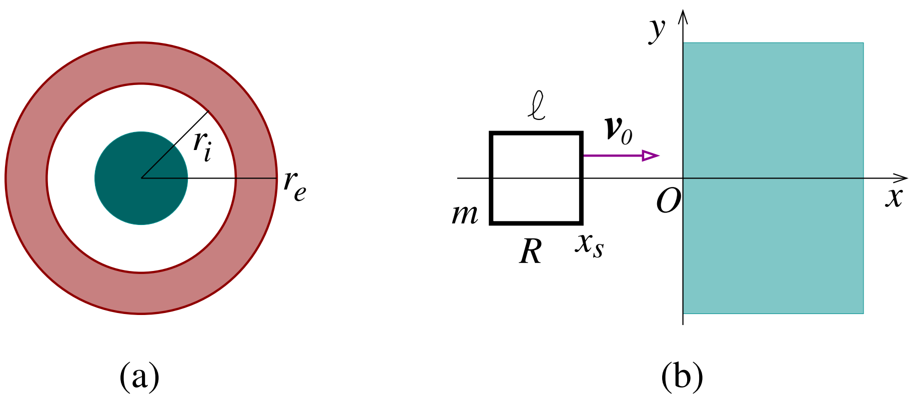

FIG. 1.

Esercizio 2. Una spira conduttrice quadrata, di lato ℓ, resistenza elettrica R, e massa m, è vincolata a muoversi di moto traslatorio nel piano xy di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La spira si muove nel verso positivo dell'asse x, mantenendo i lati paralleli agli assi, ed è inizialmente contenuta nel semispazio $x < 0$. Nel semispazio $x > 0$ è presente un campo di induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B} = \beta\, \hat{\boldsymbol{z}}$, perpendicolare al piano su cui giace la spira ($\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse z). All'istante $t = 0$ la spira, nella quale non circola corrente, giunge con velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\, \hat{\boldsymbol{x}}$ alla frontiera del semispazio $x > 0$ [$\hat{\boldsymbol{x}}$ è il versore dell'asse x e $v_0 > 0$, si veda la FIG. 1(b)]. Si adotti il verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$ e si identifichi la posizione della spira con l'ascissa x_s comune a tutti i punti del lato che entra per primo nel semispazio $x > 0$.

1. Determinare la velocità iniziale v_0, sapendo che la spira si arresta non appena è penetrata completamente nel semispazio $x > 0$.

2. Nel caso considerato al punto precedente, determinare l'intensità $i(t)$ della corrente che circola nella spira per $t > 0$ e l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 17 giugno 2016
Prof. S. Caprara

Esercizio 1.

1. Poiché il guscio è scarico,

$$Q_{tot} = \int_0^a \rho(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \frac{4\pi K}{a^4}\int_0^a r^3\, \mathrm{d}r = \pi K.$$

A seguito dell'induzione elettrostatica completa, si ha

$$\sigma_i = -\frac{Q_{tot}}{4\pi r_i^2} = -\frac{K}{16a^2}, \qquad \sigma_e = \frac{Q_{tot}}{4\pi r_e^2} = \frac{K}{36a^2}.$$

2. Per $r \le a$, la carica contenuta in una sfera di raggio r centrata nell'origine è

$$Q(r) = \int_0^r \rho(s)\, 4\pi s^2\, \mathrm{d}s = \frac{\pi K r^4}{a^4}.$$

Il campo elettrico ha solo la componente radiale che, per il teorema di Gauss, vale

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{K r^2}{4\epsilon_0 a^4};$$

per $a < r < 2a$, il campo è quello di una carica puntiforme Q_{tot} centrata nell'origine, con componente radiale

$$E_r(r) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{K}{4\epsilon_0 r^2},$$

e nel limite per $r \to r_i^-$ si ritrova il risultato previsto dal teorema di Coulomb; per $2a \le r \le 3a$ il campo elettrico è nullo; per $r > 3a$, il campo elettrico è nuovamente quello di una carica puntiforme Q_{tot} centrata nell'origine, con componente radiale

$$E_r(r) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{K}{4\epsilon_0 r^2},$$

e nel limite per $r \to r_e^+$ si ritrova il risultato previsto dal teorema di Coulomb. In ogni regione, il campo elettrico vale $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$.

2. Per $r > 3a$

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \frac{K}{4\epsilon_0 r}$$

è il potenziale di un monopolo di carica Q_{tot} posto nell'origine; per $2a \le r \le 3a$ il potenziale è costante e il valore si ottiene per continuità dal valore precedente per $r \to r_e^+$,

$$V(r) = \frac{K}{12\epsilon_0 a};$$

per $a < r < 2a$ si ha

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \int_r^{2a} E_r(s)\, \mathrm{d}s + \int_{3a}^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \frac{K}{4\epsilon_0 r} - \frac{K}{8\epsilon_0 a} + \frac{K}{12\epsilon_0 a} = \frac{K}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{6a}\right);$$

infine, per $r \le a$, si ha

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \int_r^a E_r(s)\, \mathrm{d}s + \int_a^\infty E_r(s)\, \mathrm{d}s = \frac{K}{12\epsilon_0 a^4}\left(\frac{7}{2}a^3 - r^3\right).$$

Esercizio 2.

1. Per $0 \leq x_s \leq \ell$, il flusso Φ concatenato alla spira varia e la sua derivata temporale è $\dot{\Phi} = \beta \ell v$, dove $v = \dot{x}_s$ è la velocità istantanea della spira. La forza elettromotrice indotta, la corrente indotta, e la componente x della forza agente sulla spira sono quindi

$$f = -\dot{\Phi} = -\beta \ell v, \qquad i = \frac{f}{R} = -\frac{\beta \ell v}{R}, \qquad F_x = i \ell \beta = -\frac{\beta^2 \ell^2}{R} v.$$

L'equazione del moto della spira per $0 \leq x_s \leq \ell$ è

$$m\dot{v} = F_x \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = -\frac{v}{\tau}, \qquad \text{con} \;\; \tau = \frac{mR}{\beta^2 \ell^2},$$

la cui soluzione, con la condizione iniziale $v(t=0) = v_0$, è

$$v(t) = v_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

La posizione della spira, con la condizione iniziale $x_s(t=0) = 0$, è data da

$$x_s(t) = \int_0^t v(s) \, \mathrm{d}s = v_0 \tau \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = \tau (v_0 - v)$$

Le condizioni poste dalla traccia equivalgono a richiedere che $v \to 0$ per $x_s \to \ell$, che implica

$$v_0 = \frac{\ell}{\tau} = \frac{\beta^2 \ell^3}{mR},$$

2. La corrente indotta è

$$i(t) = -\frac{\beta \ell v}{R} = -\frac{\beta \ell v_0}{R} \mathrm{e}^{-t/\tau} = -\frac{\beta \ell^2}{R\tau} \mathrm{e}^{-t/\tau} = -\frac{\beta^3 \ell^4}{mR^2} \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

L'energia dissipata per effetto Joule è

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty R \left[i(t)\right]^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\beta^4 \ell^6}{2mR^2} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

e ovviamente uguaglia l'energia cinetica iniziale della spira.