

Compito del 10 giugno 2016
Prof. S. Caprara

In ciascun esercizio, spiegate brevemente il procedimento che intendete usare.

1. Cifre significative. Riscrivete i seguenti risultati in forma appropriata, scegliendo per la misura e per l'errore il giusto numero di cifre significative:

(a) $d = (10,177 \pm 0,491)$ m; (b) $T = (2,99 \pm 0,13)$ s; (c) $M = (1,877 \pm 0,059)$ kg; (d) $g = (9,806 \pm 0,093)$ m/s².

2. Propagazione degli errori. Siano $x = 2,2 \pm 0,2$ e $y = 1,20 \pm 0,05$.

(a) Calcolate l'errore relativo su x e y .

(b) Calcolate

$$f = xy^2 + \frac{x^2}{y},$$

l'errore assoluto e l'errore relativo su f .

3. La distribuzione normale. Numerose misure ripetute di una certa grandezza g hanno permesso di valutare la media $\bar{g} = 34,5$ e la deviazione standard $\sigma_g = 1,5$. Determinare la frazione delle misure che ci si aspetta che cadano tra:

(a) 33 e 36; (b) 31,5 e 34,5; (c) 36 e 37,5.

4. Rigetto dei dati. Eseguendo $N = 10$ misure del periodo T di un pendolo, si sono trovati i valori (in secondi):

2,04; 1,92; 1,80; 1,96; 1,84; 2,28; 1,81; 1,77; 1,88; 2,00.

(a) Calcolate la media \bar{T} e la deviazione standard σ_T delle misure ottenute.

(b) Individuate la misura più anomala T_{sos} e discutete se tale misura dovrebbe essere rigettata in base al criterio di Chauvenet.

5. Media pesata. Quattro gruppi diversi hanno misurato una certa lunghezza ℓ , ottenendo i risultati (in millimetri):

126 ± 3 ; 123 ± 2 ; 131 ± 5 ; 143 ± 10 .

Ciascuna misura è il valore medio determinato dal gruppo corrispondente e l'incertezza attribuita è la deviazione standard.

(a) Trovate la media pesata ℓ_{wav} dei quattro valori e la sua incertezza σ_{wav} .

(b) Ricalcolate la media pesata ℓ'_{wav} dei primi tre valori e la sua incertezza σ'_{wav} . Ha senso includere l'ultima misura?

6. Metodo dei minimi quadrati. Misurando coppie di grandezze dipendenti (x, y) , si sono trovati i valori

(1, 2); (2, 3); (3, 5); (4, 6).

(a) Assumendo che la relazione tra x e y sia di tipo lineare, $y = A + Bx$, determinate la retta che meglio rappresenta i risultati ottenuti, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

7. Test del chi quadrato. Assumendo che le $N = 4$ misure di y dell'esercizio precedente siano tutte caratterizzate da una deviazione standard $\sigma_y = \frac{1}{2}$:

(a) Calcolate il valore del χ^2 che caratterizza lo scarto tra i valori di y osservati e quelli attesi se vale la relazione lineare trovata nell'esercizio precedente.

(b) Determinate il numero d di gradi di libertà e il valore $\tilde{\chi}_0^2$ del chi quadrato ridotto, tenendo conto del fatto che le 4 misure sono state utilizzate per determinare i parametri A e B .

(c) Determinate la probabilità $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$ che la variabile chi quadrato ridotto sia maggiore o uguale al valore trovato.

(d) Dite se è ragionevole che la relazione lineare tra x e y determinata nell'esercizio precedente descriva effettivamente i risultati osservati, assumendo come significativa la soglia del 5% per il chi quadrato ridotto.

Soluzione del Compito del 10 giugno 2016
Prof. S. Caprara

1. Cifre significative.

(a) $d = (10,2 \pm 0,5) \text{ m}$; (b) $T = (3,0 \pm 0,1) \text{ s}$; (c) $M = (1,88 \pm 0,06) \text{ kg}$; (d) $g = (9,81 \pm 0,09) \text{ m/s}^2$.

2. Propagazione degli errori.

(a) Si ha

$$\frac{\delta x}{x} = 0,091 = 9,1\%; \quad \frac{\delta y}{y} = 0,042 = 4,2\%.$$

(b) La migliore stima di f è

$$f = 2,2 \times (1,2)^2 + \frac{(2,2)^2}{1,2} = 7,2.$$

Le derivate valgono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \frac{2x}{y} = 5,1; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{x^2}{y^2} = 1,9;$$

allora, la stima dell'errore assoluto su f è

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 1,1.$$

Eseguendo gli opportuni troncamenti, $f = 7 \pm 1$. L'errore relativo su f vale $\delta f/f = 0,14 = 14\%$.

3. La distribuzione normale.

(a) $t_1 = (33 - 34,5)/1,5 = -1$, $t_2 = (36 - 34,5)/1,5 = 1$, $\mathcal{P}(t_1 \leq t \leq t_2) = P(\text{entro } \sigma) = 68,27\%$.

(b) $t_1 = (31,5 - 34,5)/1,5 = -2$, $t_2 = (34,5 - 34,5)/1,5 = 0$, $\mathcal{P}(t_1 \leq t \leq t_2) = \mathcal{P}(t_2 \leq t \leq -t_1) = Q(2) - Q(0) = 47,72\%$.

(c) $t_1 = (36 - 34,5)/1,5 = 1$, $t_2 = (37,5 - 34,5)/1,5 = 2$, $\mathcal{P}(t_1 \leq t \leq t_2) = Q(2) - Q(1) = 13,59\%$.

4. Rigetto dei dati.

(a) $\bar{T} = 1,93$. Gli scarti sono: $T_k - \bar{T} = 0,11; -0,01; -0,13; 0,03; -0,09; 0,35; -0,12; -0,16; -0,05; 0,07$. Si verifica che la somma degli scarti è nulla. La deviazione standard vale $\sigma_T = \sqrt{0,208/9} = 0,15$.

(b) La misura più anomala è quella con lo scarto più grande in valore assoluto ($= 0,35$), cioè $T_{sos} = 2,28$. Si ha

$$t_{sos} = \frac{|T_{sos} - \bar{T}|}{\sigma_T} = 2,33$$

e $P(t \geq t_{sos}) = 1 - P(t \leq t_{sos}) = 0,0198$. Allora $n = N \times P(t \geq t_{sos}) = 0,198 < 0,5$ e il dato deve essere rigettato in base al criterio di Chauvenet.

5. Media pesata.

(a) I pesi valgono $\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}, \frac{1}{100}$. Quindi

$$\ell_{wav} = \frac{\frac{126}{9} + \frac{123}{4} + \frac{131}{25} + \frac{143}{100}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}} = 125,1; \quad \sigma'_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}}} = 1,6.$$

(b) Eliminata l'ultima misura si ha

$$\ell'_{wav} = \frac{\frac{126}{9} + \frac{123}{4} + \frac{131}{25}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}} = 124,6; \quad \sigma_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}}} = 1,6.$$

La discrepanza tra le due medie è $|\ell_{w_{av}} - \ell'_{w_{av}}| = 0,5 < \sigma_{w_{av}}, \sigma'_{w_{av}}$, quindi l'ultima misura non dà un contributo significativo alla media.

6. Metodo dei minimi quadrati.

(a) Si ha

$x :$	1	2	3	4
$y :$	2	3	5	6
$x^2 :$	1	4	9	16
$xy :$	2	6	15	24

Quindi $\bar{x} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = 4$, $\overline{x^2} = \frac{15}{2}$, $\overline{xy} = \frac{47}{4}$. Allora

$$A = \frac{\overline{x^2} \bar{y} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{7}{5},$$

e la retta dei minimi quadrati è: $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{5}x$.

7. Test del chi quadrato.

(a) I valori osservati O_k sono i valori di y e i valori attesi E_k sono i valori di $A + Bx$. Si ottiene la tabella

$O_k :$	2	3	5	6
$E_k :$	$\frac{19}{10}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{47}{10}$	$\frac{61}{10}$
$O_k - E_k :$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$

da cui risulta evidente che la somma degli scarti è nulla. Quindi

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{O_k - E_k}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{4}{5}.$$

(b) Poiché i dati sono stati utilizzati per stimare i due parametri A e B della retta dei minimi quadrati, si ha $d = N - c = 4 - 2 = 2$ e la variabile chi quadrato ridotto vale $\tilde{\chi}_o^2 = \tilde{\chi}^2/d = \frac{2}{5}$.

(c) Si ha $P_{d=2}(\tilde{\chi}^2 \geq \frac{2}{5}) = 67\%$.

(d) La probabilità ottenuta è largamente superiore alla soglia del 5%, quindi si può affermare che la retta dei minimi quadrati dà una descrizione assai ragionevole dei dati osservati.