Esonero del 10 giugno 2016
Prof. S. Caprara

In ciascun esercizio, spiegate brevemente il procedimento che intendete usare. Gli esercizi segnati da un asterisco ($*$) sono di complemento. Si consiglia di risolverli dopo aver risolto gli altri.

1. La distribuzione normale. Numerose misure ripetute di una certa grandezza g hanno permesso di valutare la media $\bar{g}$ =34,5 e la deviazione standard σ_g =1,5. Determinate la frazione delle misure che ci si aspetta che cadano tra:

(a) 33 e 36; (b) 31,5 e 37,5; (c) 31,5 e 34,5; (d)* 36 e 37,5.

2. Rigetto dei dati. Eseguendo $N = 10$ misure del periodo T di un pendolo, si sono trovati i valori (in secondi):

2,04; 1,92; 1,80; 1,96; 1,84; 2,28; 1,81; 1,77; 1,88; 2,00.

(a) Calcolate la media $\overline{T}$ e la deviazione standard σ_T (quest'ultima, con due cifre significative, e con $N - 1$ al denominatore) delle misure ottenute.
(b) Individuate la misura più anomala T_{sos} e discutete se tale misura dovrebbe essere rigettata in base al criterio di Chauvenet.
(c)* Ricalcolate la media $\overline{T}'$ e la deviazione standard σ'_T delle 9 misure che restano dopo aver rigettato la misura anomala e commentate il risultato.

3. Media pesata. Quattro gruppi diversi hanno misurato una certa lunghezza ℓ, ottenendo i risultati (in millimetri):

126 ± 3; 123 ± 2; 131 ± 5; 143 ± 10.

Ciascuna misura è il valore medio determinato dal gruppo corrispondente e l'incertezza attribuita è la deviazione standard.
(a) Trovate la media pesata ℓ_{wav} dei quattro valori e la sua incertezza σ_{wav}.
(b)* Ricalcolate la media pesata ℓ'_{wav} dei primi tre valori e la sua incertezza σ'_{wav}. Ha senso includere l'ultima misura?

4. Metodo dei minimi quadrati. Misurando coppie di grandezze dipendenti (x, y), si sono trovati i valori

$(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3; 5)$; $(4; 6)$.

(a) Assumendo che la relazione tra x e y sia di tipo lineare, $y = A + Bx$, determinate la retta che meglio rappresenta i risultati ottenuti, utilizzando il metodo dei minimi quadrati.
(b) Verificate che la retta dei minimi quadrati passi per il punto $(\bar{x}, \bar{y})$.
(c) Riportate i punti corrispondenti alle misure e la retta dei minimi quadrati sul piano cartesiano.

5. Test del chi quadrato. Assumendo che le $N = 4$ misure di y dell'esercizio precedente siano tutte caratterizzate da una deviazione standard $\sigma_y = \frac{1}{2}$:
(a) Calcolate il valore del χ^2 che caratterizza lo scarto tra i valori di y osservati e quelli attesi se vale la relazione lineare trovata nell'esercizio precedente.
(b) Determinate il numero d di gradi di libertà e il valore $\tilde{\chi}^2_o$ del chi quadrato ridotto, tenendo conto del fatto che le 4 misure sono state utilizzate per determinare i parametri A e B.
(c) Determinate la probabilità $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}^2_o)$ che la variabile chi quadrato ridotto sia maggiore o uguale al valore trovato.
(d) Dite se è ragionevole che la relazione lineare tra x e y determinata nell'esercizio precedente descriva effettivamente i risultati osservati, assumendo come significativa la soglia del 5% per il chi quadrato ridotto.

Soluzione dell'Esonero del 10 giugno 2016
Prof. S. Caprara

1. La distribuzione normale.
(a) $t_1 = (33 - 34{,}5)/1{,}5 = -1$, $t_2 = (36 - 34{,}5)/1{,}5 = 1$, $\mathcal{P}(t_1 \le t \le t_2) = P(\text{entro}\,\sigma) = 68{,}27\%$.
(b) $t_1 = (31{,}5 - 34{,}5)/1{,}5 = -2$, $t_2 = (37{,}5 - 34{,}5)/1{,}5 = 2$, $\mathcal{P}(t_1 \le t \le t_2) = P(\text{entro}\,2\sigma) = 95{,}45\%$.
(c) $t_1 = (31{,}5 - 34{,}5)/1{,}5 = -2$, $t_2 = (34{,}5 - 34{,}5)/1{,}5 = 0$, $\mathcal{P}(t_1 \le t \le t_2) = \mathcal{P}(t_2 \le t \le -t_1) = Q(2) - Q(0) = 47{,}72\%$.
(d)* $t_1 = (36 - 34{,}5)/1{,}5 = 1$, $t_2 = (37{,}5 - 34{,}5)/1{,}5 = 2$, $\mathcal{P}(t_1 \le t \le t_2) = Q(2) - Q(1) = 13{,}59\%$.

2. Rigetto dei dati.
(a) $\overline{T} = 1{,}93$. Gli scarti sono: $T_k - \overline{T} = 0{,}11$; -0,01; -0,13; 0.03; -0,09; 0,35; -0,12; -0,16; -0,05; 0,07. Si verifica che la somma degli scarti è nulla. La deviazione standard vale $\sigma_T = \sqrt{0{,}208/9} = 0,15$.
(b) La misura più anomala è quella con lo scarto più grande in valore assoluto (= 0,35), cioè $T_{sos} = 2{,}28$. Si ha

$$t_{sos} = \frac{\left|T_{sos} - \overline{T}\right|}{\sigma_T} = 2{,}33$$

e $P(t \ge t_{sos}) = 1 - P(t \le t_{sos}) = 0{,}0198$. Allora $n = N \times P(t \ge t_{sos}) = 0{,}198 < 0{,}5$ e il dato deve essere rigettato in base al criterio di Chauvenet.
(c)* Scartata la misura anomala, la media vale $\overline{T}\,' = 1{,}891$ e la deviazione standard vale $\sigma'_T = 0,095$. I dati sono meno sparpagliati.

3. Media pesata.
(a) I pesi valgono $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$. Quindi

$$\ell_{wav} = \frac{\frac{126}{9} + \frac{123}{4} + \frac{131}{25} + \frac{143}{100}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}} = 125{,}1; \qquad \sigma'_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}}} = 1{,}6.$$

(b)* Eliminata l'ultima misura si ha

$$\ell'_{wav} = \frac{\frac{126}{9} + \frac{123}{4} + \frac{131}{25}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}} = 124{,}6; \qquad \sigma_{wav} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{25}}} = 1{,}6.$$

La discrepanza tra le due medie è $|\ell_{wav} - \ell'_{wav}| = 0{,}5 < \sigma_{wav}, \sigma'_{wav}$, quindi l'ultima misura non dà un contributo significativo alla media.

4. Metodo dei minimi quadrati.
(a) Si ha

x :	1	2	3	4
y :	2	3	5	6
x^2 :	1	4	9	16
xy :	2	6	15	24

Quindi $\bar{x} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = 4$, $\overline{x^2} = \frac{15}{2}$, $\overline{xy} = \frac{47}{4}$. Allora

$$A = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \bar{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{1}{2}\,, \qquad B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{7}{5}\,,$$

e la retta dei minimi quadrati è: $y = \frac{1}{2} + \frac{7}{5}x$.
(b) Sostituendo direttamente $\bar{x}$ a secondo membro si trova $\frac{1}{2} + \frac{7}{5}\bar{x} = \frac{1}{2} + \frac{7}{5}\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4 = \bar{y}$, come si voleva dimostrare.

(c) Il grafico richiesto è il seguente:

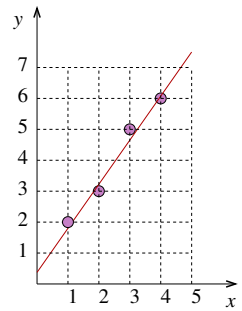

FIG. 1.

5. Test del chi quadrato.
(a) I valori osservati O_k sono i valori di y e i valori attesi E_k sono i valori di $A + Bx$. Si ottiene la tabella

$$\begin{array}{rcccc} O_k: & 2 & 3 & 5 & 6 \\ E_k: & \frac{19}{10} & \frac{33}{10} & \frac{47}{10} & \frac{61}{10} \\ \\ O_k - E_k: & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}$$

da cui risulta evidente che la somma degli scarti è nulla. Quindi

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{O_k - E_k}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{4}{5}.$$

(b) Poiché i dati sono stati utilizzati per stimare i due parametri A e B della retta dei minimi quadrati, si ha $d = N - c = 4 - 2 = 2$ e la variabile chi quadrato ridotto vale $\tilde{\chi}_o^2 = \tilde{\chi}^2/d = \frac{2}{5}$.
(c) Si ha $P_{d=2}(\tilde{\chi}^2 \geq \frac{2}{5}) = 67\%$.
(d) La probabilità ottenuta è largamente superiore alla soglia del 5%, quindi si può affermare che la retta dei minimi quadrati dà una descrizione assai ragionevole dei dati osservati.