Esonero del 29 aprile 2016
Prof. S. Caprara

In ciascun esercizio, spiegate brevemente il procedimento che intendete usare.

1. Cifre significative; errori relativi. Riscrivete i seguenti risultati in forma appropriata, scegliendo per la misura e per l'errore il giusto numero di cifre significative:
(a) $\ell = (12,347 \pm 0,484)\,\mathrm{m}$; (b) $t = (0,99 \pm 0,23)\,\mathrm{s}$; (c) $m = (3,884 \pm 0,051)\,\mathrm{kg}$; (d) $a = (9,883 \pm 0,262)\,\mathrm{m/s^2}$.
Calcolate l'errore relativo su ciascuna delle precedenti grandezze.

2. Discrepanza. Due misure della stessa grandezza, eseguite da due diversi sperimentatori, hanno dato i risultati $v_1 = (320 \pm 10)\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = (290 \pm 50)\,\mathrm{m/s}$. Calcolate la discrepanza tra i due risultati e stabilite se possa realmente trattarsi di misure della stessa grandezza. Illustrate le vostre conclusioni con un grafico.

3. Confronto tra valori misurati e accettati. Nel misurare il numero di Avogadro, il cui valore accettato è $N_A = 6,022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ (l'errore su questo valore è trascurabile), due gruppi hanno trovato i risultati:

$$N_A^{(1)} = (6,5 \pm 0,6) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}, \qquad N_A^{(2)} = (5,85 \pm 0,06) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}.$$

Queste due misure sono entrambe compatibili con il valore accettato?

4. Propagazione degli errori su somme, differenze, prodotti e quozienti.
(a) Siano $x = 13,3 \pm 0,6$ e $y = 4,2 \pm 0,5$. Calcolate $s = x + y$ e il suo errore.
(b) Siano $u = 9,3 \pm 0,3$ e $v = 0,55 \pm 0,05$. Calcolate $p = uv$ e il suo errore.
(c) Siano $a = 85,9 \pm 0,8$ e $b = 5,2 \pm 0,3$. Calcolate $d = a - b$ e il suo errore.
(d) Siano $s = 25,6 \pm 0,5$ e $t = 5,1 \pm 0,3$. Calcolate $q = s/t$ e il suo errore.

5. Propagazione degli errori su funzioni arbitrarie. Siano $x = 3,3 \pm 0,2$ e $y = 2,25 \pm 0,05$. Calcolate l'errore relativo su x e y.
(a) Calcolate

$$f = 3\,x^2 y^3$$

e il suo errore. Trovate l'errore relativo su f.
(b) Calcolate

$$g = 5\,x\sqrt{y}$$

e il suo errore. Trovate l'errore relativo su g.

6. Media e deviazione standard. $N = 6$ misure ripetute del periodo di un pendolo hanno dato i risultati (tutti in s)

$$T = \quad 3,3 \quad 2,9 \quad 3,0 \quad 3,4 \quad 2,6 \quad 2,8$$

Stimate il periodo del pendolo utilizzando la media $\bar{T}$ dei valori ottenuti. Calcolate gli scarti e verificate che la somma degli scarti sia nulla. Calcolate la deviazione standard σ_T (usando $N - 1 = 5$ nell'espressione dello scarto quadratico medio).

Soluzione dell'Esonero del 29 aprile 2016
Prof. S. Caprara

1. Cifre significative; errori relativi.
(a) $\ell = (12,3 \pm 0,5)\,\mathrm{m}$; (b) $t = (1,0 \pm 0,2)\,\mathrm{s}$; (c) $m = (3,88 \pm 0,05)\,\mathrm{kg}$; (d) $a = (9,9 \pm 0,3)\,\mathrm{m/s^2}$.

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = 0,041 = 4,1\%; \qquad \frac{\delta t}{t} = 0,20 = 20\%; \qquad \frac{\delta m}{m} = 0,013 = 1,3\%; \qquad \frac{\delta a}{a} = 0,03 = 3\%$$

2. Discrepanza. $\Delta_{best} = 320 - 290 = 30\,\mathrm{m/s}$; $\delta\Delta = 50 + 10 = 60\,\mathrm{m/s}$; $\Delta = (30 \pm 60)\,\mathrm{m/s}$, è compatibile con $\Delta = 0$, quindi le misure si riferiscono effettivamente alla stessa grandezza.

3. Confronto tra valori misurati e accettati. Il valore accettato cade nell'intervallo di definizione della prima misura, ma non in quello della seconda. La seconda misura, benché apparentemente piú precisa, non è quindi compatibile con il valore accettato.

4. Propagazione degli errori su somme, differenze, prodotti e quozienti.

$$\text{(a)}\quad s = 18 \pm 1 \qquad \text{(b)}\quad \frac{\delta u}{u} = 0,032; \quad \frac{\delta v}{v} = 0,091 \Rightarrow \frac{\delta p}{p} = 0,123 \Rightarrow p = 5,1 \pm 0,6$$

$$\text{(c)}\quad d = 81 \pm 1 \qquad \text{(d)}\quad \frac{\delta s}{s} = 0,020; \quad \frac{\delta t}{t} = 0,059 \Rightarrow \frac{\delta q}{q} = 0,079 \Rightarrow q = 5,0 \pm 0,4$$

5. Propagazione degli errori su funzioni arbitrarie.

$$\text{(a)}\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 6\,xy^3 = 226 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\delta x = 45; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 9\,x^2y^2 = 496 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 25; \qquad \delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y = 70;$$

$$f = 370 \pm 70; \qquad \frac{\delta f}{f} = 0,19 = 19\%$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 5\sqrt{y} = 7,5 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}\delta x = 1,5; \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{5\,x}{2\sqrt{y}} = 5,5 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}\delta y = 0,28; \qquad \delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\delta y = 2;$$

$$g = 25 \pm 2; \qquad \frac{\delta g}{g} = 0,08 = 8\%$$

6. Media e deviazione standard.

$$\bar{T} = \frac{3,3 + 2,9 + 3,0 + 3,4 + 2,6 + 2,8}{6} = 3,0\,\mathrm{s}$$

$$T - \bar{T} = \quad 0,3 \qquad -0,1 \qquad 0,0 \qquad 0,4 \qquad -0,4 \qquad -0,2 \qquad \mathrm{s}$$

e la somma degli scarti è pari a zero.

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{(0,3)^2 + (0,1)^2 + 2\,(0,4)^2 + (0,2)^2}{5}} = 0,3\,\mathrm{s}$$

quindi $T = (3,0 \pm 0,3)\,\mathrm{s}$.