Compito Straordinario di Fisica Generale II del 19 aprile 2016
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Si consideri una distribuzione di carica a simmetria sferica tale che il campo elettrostatico da questa creato in tutto lo spazio ha componente radiale

$$E_r(r) = \frac{K}{a^2 + r^2},$$

in un opportuno sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro di simmetria della distribuzione; $a > 0$ e K sono costanti dimensionali e r è la coordinata radiale sferica.

1. Determinare la densità di carica $\rho(r)$ che descrive la distribuzione assegnata, e la carica totale Q ad essa corrispondente.

2. Determinare il potenziale elettrostatico $V(r)$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata, assumendo che esso si annulli all'infinito.

Esercizio 2. Una spira conduttrice quadrata, di lato ℓ, resistenza elettrica R e autoinduttanza L, è posta nel piano xy di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale ed è immersa in un campo di induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B} = B_z\,\hat{\boldsymbol{z}}$, perpendicolare al piano su cui giace la spira ($\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse z). All'istante $t = 0$ nella spira non circola corrente e il campo comincia a variare nel tempo secondo la legge

$$B_z(t) = \beta\, \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{(spegnimento esponenziale)},$$

dove $\tau > 0$ e β sono costanti dimensionali. Si ponga $\tau_0 = L/R$ e si adotti il verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$.

1. Determinare l'intensità $i(t)$ della corrente che circola nella spira per $t > 0$ nel caso $\tau \neq \tau_0$.

2. Determinare l'intensità $i(t)$ della corrente che circola nella spira per $t > 0$ nel caso *risonante* $\tau = \tau_0$.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 26 febbraio 2016
Prof. S. Caprara

<u>Esercizio 1</u>.

1. Per la legge di Gauss,

$$\rho(r) = \epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\, E_r(r)\right] = \frac{2\epsilon_0 K a^2}{r(r^2+a^2)^2}.$$

La carica totale è

$$Q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)\, r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\epsilon_0 K.$$

Al risultato si può anche giungere senza calcoli, osservando che per grandi r il campo elettrico tende a quello di un monopolo. Infatti, per $r \gg a$, a meno di ordini $(a/r)^2$, si ha

$$E_r(r) \approx \frac{K}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}.$$

2. Si ha

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(s)\,\mathrm{d}s = \frac{K}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{r}{a}\right)\right].$$

<u>Esercizio 2</u>.

1. Il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la spira è $\Phi(t) = B_z(t)\ell^2 = \beta\ell^2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. La forza elettromotrice indotta è quindi

$$f = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta\ell^2}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

L'equazione del circuito è

$$f - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau_0} = \frac{\beta\ell^2}{L\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

La soluzione generale dell'omogenea è $i_{omo}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_0}$, con A costante da determinarsi in base alla condizione iniziale. Una soluzione particolare (per $\tau \neq \tau_0$) è della forma $i_{part}(t) = C\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, dove il valore della costante C è determinato dall'equazione. Sostituendo, si trova

$$C = \frac{\beta\ell^2}{R(\tau-\tau_0)} \qquad \Rightarrow \qquad i_{part}(t) = \frac{\beta\ell^2}{R(\tau-\tau_0)}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

La soluzione generale dell'equazione è quindi $i(t) = i_{omo}(t) + i_{part}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_0} + C\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ e imponendo $i(t=0) = 0$ si trova $A = -C$, cioè

$$i(t) = \frac{\beta\ell^2}{R}\,\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau_0}}{\tau - \tau_0}.$$

2. Per $\tau \to \tau_0$ l'espressione trovata al punto precedente diventa una forma indeterminata del tipo $0/0$. Applicando la regola di de l'Hôpital, si trova

$$i(t) = \frac{\beta\ell^2}{R\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Una verifica diretta mostra che questa è effettivamente soluzione dell'equazione nel caso *risonante* $\tau = \tau_0$, soddisfacente la condizione iniziale.