Compito di Fisica Generale II del 26 febbraio 2016
Prof. S. Caprara

Esercizio 1. Si consideri un condensatore piano le cui armature di superficie S giacciono sui piani $z = 0$ e $z = d > 0$ in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale [FIG. 1 (a)]. Lo spazio tra le armature è riempito di un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica varia con la coordinata z secondo la legge

$$\epsilon_r(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{z^3}{2d^3}}, \quad (\text{per } 0 \leq z \leq d).$$

L'armatura a $z = 0$ è messa a terra, mentre l'armatura a $z = d$ è tenuta al potenziale V_0.

1. Determinare la capacità C del condensatore e le cariche Q_0 e Q_d presenti sulle due armature (i pedici 0 e d indicano, rispettivamente, l'armatura a $z = 0$ e l'armatura a $z = d$).

2. Determinare il potenziale elettrostatico $V(z)$ e il campo elettrico $\boldsymbol{E}(z)$ tra le armature del condensatore. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{k}}$ il versore dell'asse z.

3. Determinare le densità superficiali di cariche di polarizzazione σ_0^{pol} e σ_d^{pol} che si formano in corrispondenza delle due armature, e la densità di volume di cariche di polarizzazione $\rho^{pol}(z)$ in seno al dielettrico.

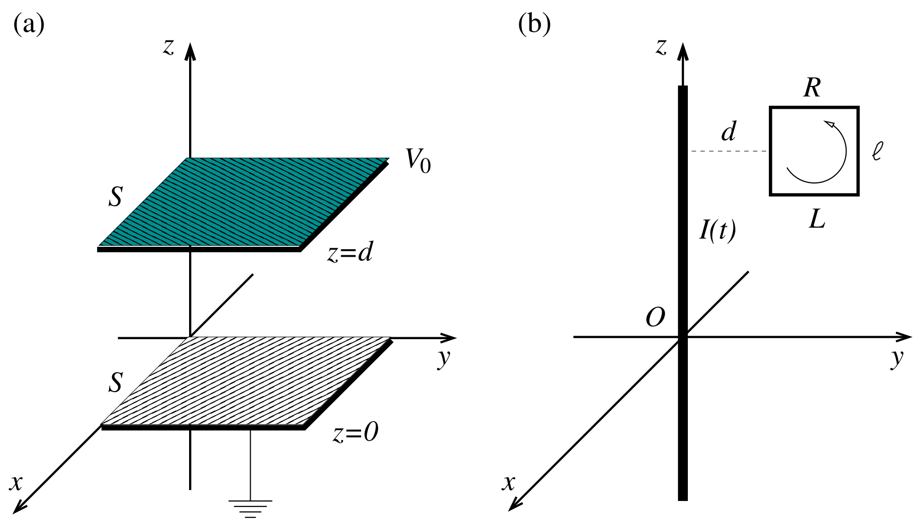

FIG. 1.

Esercizio 2. Una spira conduttrice quadrata, di lato ℓ, resistenza elettrica R e autoinduttanza L, è posta nel piano yz di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con i lati paralleli agli assi y e z. Il lato della spira più vicino all'asse z ha una distanza d da questo asse. Lungo l'asse z è presente un filo rettilineo infinito percorso da una corrente alternata di intensità $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Il segno di I è riferito al verso positivo dell'asse z [FIG. 1 (b)].

1. Determinare il flusso $\Phi(t)$ attraverso la spira del campo di induzione magnetica generato dal filo, e la forza elettromotrice $f(t)$ indotta nella spira, riferendosi al verso di percorrenza della spira indicato in FIG. 1 (b).

2. Determinare l'intensità $i(t)$ della corrente indotta che circola nella spira per $t > 0$, assumendo che $i(t = 0) = 0$. [Per alleggerire la notazione, si suggerisce di porre $f_0 = \frac{1}{2\pi}\mu_0 \ell I_0 \omega \ln\left(1 + \frac{\ell}{d}\right)$ e $\tau = L/R$].

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 26 febbraio 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. La capacità cercata C è tale che

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\int_0^d \frac{\mathrm{d}z}{\epsilon_r(z)} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\int_0^d \mathrm{d}z\left(1-\frac{z^3}{2d^3}\right) = \frac{7d}{8\epsilon_0 S} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{8}{7}\,\frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Le cariche cercate sono

$$Q_d = CV_0 = \frac{8\epsilon_0 S V_0}{7d}, \qquad Q_0 = -Q_d = -\frac{8\epsilon_0 S V_0}{7d}.$$

2. Il potenziale è

$$V(z) = \frac{Q_d}{C(z)}, \qquad \text{con} \quad \frac{1}{C(z)} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\int_0^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\epsilon_r(\zeta)} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\left(z-\frac{z^4}{8d^3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = \frac{8V_0 z}{7d}\left(1-\frac{z^3}{8d^3}\right).$$

Il campo elettrico è $\boldsymbol{E}(z) = E_z(z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, con

$$E_z(z) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{8V_0}{7d}\left(\frac{z^3}{2d^3}-1\right).$$

3. Lo spostamento dielettrico è $\boldsymbol{D}(z) = D_z(z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, con

$$D_z(z) = \frac{Q_0}{S} = -\frac{8\epsilon_0 V_0}{7d};$$

la polarizzazione è $\boldsymbol{P}(z) = P_z(z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, con

$$P_z(z) = D_z(z) - \epsilon_0 E_z(z) = -\frac{4\epsilon_0 V_0 z^3}{7d^4}.$$

Allora

$$\sigma_0^{pol} = -P_z(z=0) = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_d^{pol} = P_z(z=d) = -\frac{4\epsilon_0 V_0}{7d} = -\frac{Q_d}{2S}.$$

Inoltre

$$\rho^{pol}(z) = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{\mathrm{d}P_z}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{12\epsilon_0 V_0 z^2}{7d^4}.$$

Esercizio 2.

1. Sul piano yz, il campo magnetico generato dal filo ha solo componente x e

$$B_x(y) = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi y}.$$

Il flusso cercato vale

$$\Phi(t) = -\frac{\mu_0 \ell I(t)}{2\pi} \int_d^{d+\ell} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mu_0 \ell I(t)}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\ell}{d}\right).$$

La forza elettromotrice indotta è

$$f(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\ell}{d}\right) \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mu_0 \ell I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\ell}{d}\right) \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t),$$

avendo posto $f_0 = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \ell I_0 \omega \ln\left(1 + \frac{\ell}{d}\right)$.

2. L'equazione del circuito è

$$f(t) - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} i + \frac{f_0}{L} \cos(\omega t).$$

avendo posto $\tau = L/R$. La soluzione è ottenuta sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, ad una soluzione particolare dell'equazione, ed ha la forma $i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, dove la costante A è determinata dalla condizione iniziale, mentre

$$a = \frac{f_0}{R} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \qquad b = \frac{f_0}{R} \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Imponendo che $i(t = 0) = 0$ si trova $A = -b$ e quindi, in definitiva,

$$i(t) = \frac{f_0}{R} \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \left[\omega\tau \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right].$$