Compito di Fisica Generale II del 5 febbraio 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1. In una certa regione di spazio è presente il potenziale elettrostatico

$$V(r) = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a+r},$$

dove $a > 0$ e K sono parametri dimensionali e r è la coordinata radiale sferica in un opportuno sistema di riferimento assegnato.

1. Determinare il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ associato al potenziale dato, indicando con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

2. Determinare la distribuzione di carica $\rho(r)$ che genera il potenziale assegnato.

3. Determinare la carica totale Q associata alla distribuzione trovata al punto precedente.

Esercizio 2. Una spira conduttrice quadrata rigida, di lato ℓ, resistenza elettrica R, e massa m, giace sul piano verticale yz di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La spira è soggetta alla forza peso $\boldsymbol{P}$, diretta nel verso negativo dell'asse z, ed è immersa in un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B} = (B_x, 0, 0)$ perpendicolare al piano yz. Il campo $\boldsymbol{B}$ dipende dalla quota z secondo la relazione

$$B_x(z) = \beta\,\frac{z}{\ell},$$

dove β è un parametro dimensionale. La spira può muoversi verticalmente nel piano yz, di moto traslatorio, mantenendo i lati paralleli agli assi. La posizione della spira è determinata in ogni istante dalla quota del suo centro z_c. Si indichi con $g > 0$ il valore assoluto dell'accelerazione di gravità.

1. Determinare il flusso del campo magnetico Φ attraverso la spira in funzione di z_c e l'intensità i della corrente indotta che circola nella spira in funzione della velocità $\dot{z}_c$, riferendosi al verso di percorrenza della spira indicato in figura.

2. Determinare la risultante $\boldsymbol{F} = (0, 0, F_z)$ delle forze esercitate dal campo magnetico sulla spira, in funzione di $\dot{z}_c$, e l'equazione del moto della spira.

3. Assumendo che la velocità della spira sia inizialmente nulla e che la sua quota iniziale z_0 sia sufficientemente grande da permettere alla spira di raggiungere la velocità di regime $\boldsymbol{v}_\infty = (0, 0, v_\infty)$, determinare v_∞.

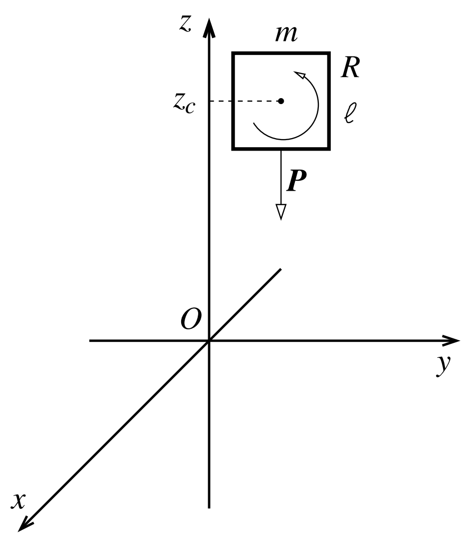

FIG. 1.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 5 febbraio 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. Poiché il potenziale dipende solo da r, il campo elettrico è radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, con componente radiale

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(a+r)^2}.$$

2. La densità di carica è $\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Poiché $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$, e $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, le componenti cartesiane del campo elettrico sono

$$E_x(\boldsymbol{r}) = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{r(a+r)^2}, \qquad E_y(\boldsymbol{r}) = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{r(a+r)^2}, \qquad E_z(\boldsymbol{r}) = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{r(a+r)^2},$$

con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Quindi

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(a+r)^2}\left[1 - \frac{x^2(3r+a)}{r^2(r+a)}\right], \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(a+r)^2}\left[1 - \frac{y^2(3r+a)}{r^2(r+a)}\right],$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(a+r)^2}\left[1 - \frac{z^2(3r+a)}{r^2(r+a)}\right],$$

e la densità

$$\rho(r) = \epsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{K}{4\pi}\,\frac{2a}{r(a+r)^3}$$

dipende solo da $r = |\boldsymbol{r}|$, come conseguenza della simmetria sferica del problema. I calcoli sono più rapidi se si ricorda che, per un campo puramente radiale,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 E_r(r)\right] = \frac{\mathrm{d}E_r}{\mathrm{d}r}(r) + \frac{2E_r(r)}{r}.$$

3. La carica cercata è ottenuta integrando $\rho(r)$ in tutto lo spazio. Sfruttando la simmetria sferica e integrando per parti si trova

$$Q = 4\pi\int_0^\infty \rho(r)\,r^2\mathrm{d}r = 2Ka\int_0^\infty \frac{r}{(a+r)^3}\,\mathrm{d}r = -Ka\int_0^\infty r\;\mathrm{d}\frac{1}{(a+r)^2} = Ka\int_0^\infty \frac{1}{(a+r)^2}\,\mathrm{d}r = K.$$

Questo risultato è evidente se si osserva che per grandi r il potenziale assegnato tende a quello di un monopolo di carica $Q = K$.

Esercizio 2.

1. Il flusso cercato è

$$\Phi(z_c) = \int_{z_c-\frac{\ell}{2}}^{z_c+\frac{\ell}{2}} B_x(z)\,\ell\,\mathrm{d}z = \beta \int_{z_c-\frac{\ell}{2}}^{z_c+\frac{\ell}{2}} z\,\mathrm{d}z = \beta\ell z_c.$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$i = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta\ell}{R}\dot{z}_c.$$

2. Le forze agenti sui lati verticali della spira sono uguali e opposte e non contribuiscono alla risultante cercata. Sul lato orizzontale superiore agisce una forza diretta lungo l'asse z, con componente

$$F_z^{sup} = i\ell B_x\left(z = z_c + \frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\beta^2\ell}{R}\dot{z}_c\left(z_c + \frac{\ell}{2}\right).$$

Sul lato orizzontale inferiore agisce una forza diretta lungo l'asse z, con componente

$$F_z^{inf} = -i\ell B_x\left(z = z_c - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\beta^2\ell}{R}\dot{z}_c\left(z_c - \frac{\ell}{2}\right).$$

La risultante cercata ha quindi solo componente z data da

$$F_z = F_z^{sup} + F_z^{inf} = -\frac{\beta^2\ell^2}{R}\dot{z}_c.$$

Si osservi che nel moto di caduta della spira $\dot{z}_c < 0$ e la forza è diretta verso l'alto, cioè si oppone al moto. L'equazione del moto cercata è

$$m\ddot{z}_c = -mg + F_x \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z}_c = -\left(g + \frac{\dot{z}_c}{\tau}\right), \qquad \text{con} \quad \tau = \frac{Rm}{\beta^2\ell^2},$$

e condizioni iniziali $z_c(t=0) = z_0$ e $\dot{z}_c(t=0) = 0$

3. Introducendo la velocità $v = \dot{z}_c$, l'equazione del moto diventa

$$\dot{v} = -\left(g + \frac{v}{\tau}\right),$$

con condizione iniziale $v(t=0) = 0$.
L'equazione si integra per parti, oppure sommando alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata, dipendente da una costante d'integrazione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, fissando poi la costante d'integrazione con la condizione iniziale. Si trova

$$v(t) = g\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right).$$

Per $t > 0$ si ha $v(t) < 0$, quindi la velocità è diretta nel verso negativo dell'asse z, cioè verso il basso. Per $t \to \infty$ si ottiene

$$v_\infty = -g\tau = -\frac{Rmg}{\beta^2\ell^2}.$$

Per trovare tale valore, non è in realtà necessario integrare l'equazione del moto. È sufficiente trovare la soluzione stazionaria, tale che $\dot{v}_{staz} = 0$, cioè $v_{staz} = -g\tau$.