Capitolo I

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

§ 1. *Velocità di propagazione delle interazioni*

Per la descrizione dei processi che avvengono nella natura occorre un *sistema di riferimento*. Con sistema di riferimento si intende l'insieme di un sistema di coordinate, che serve a determinare la posizione delle particelle nello spazio, e di un orologio per indicare il tempo legato al sistema stesso.

Esistono sistemi di riferimento nei quali il moto libero dei corpi, cioè il moto dei corpi non sottoposti all'azione di forze esterne, avviene a velocità costante. Tali sistemi di riferimento sono detti *inerziali*.

Se due sistemi di riferimento si trovano l'uno rispetto all'altro in moto rettilineo uniforme e se uno di essi è inerziale, è evidente che è inerziale anche il secondo (ogni moto libero anche in questo sistema sarà rettilineo ed uniforme). Esiste quindi un numero arbitrario di sistemi di riferimento inerziali, che si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme.

L'esperienza dimostra la validità del cosiddetto *principio di relatività*. Secondo questo principio tutte le leggi della natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In altri termini, le equazioni che esprimono le leggi della natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle coordinate e del tempo, corrispondenti ad un cambiamento di riferimento inerziale. Ciò significa che l'equazione descrivente una legge della natura, espressa mediante le coordinate e il tempo, ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

L'interazione di particelle materiali viene descritta in meccanica classica mediante l'energia potenziale d'interazione, la quale è una funzione delle coordinate delle particelle interagenti. È facile vedere che questo metodo di descrizione presuppone valida l'ipotesi che le interazioni si propaghino istantaneamente. Infatti, secondo questa descrizione, le forze che le altre particelle esercitano su una particella data dipendono, in ogni istante di tempo, soltanto dalla posizione delle particelle in questo stesso istante. Il cambiamento della posizione di qualsiasi particella interagente si riflette istantaneamente sulle altre particelle.

L'esperienza mostra, tuttavia, che non esistono nella natura interazioni istantanee. Per questa ragione, la meccanica, che parte dall'ipotesi della propagazione istantanea delle interazioni, contiene una certa imprecisione. In realtà, se uno dei corpi interagenti subisce qualche cambiamento, la ripercussione su un altro corpo del sistema si produrrà dopo un certo intervallo di tempo. Soltanto alla fine di questo intervallo di tempo il secondo corpo subirà processi dovuti a questo cambiamento. Dividendo la distanza tra i due corpi per questo intervallo di tempo, troviamo la « velocità di propagazione delle interazioni ».

Notiamo che questa velocità si potrebbe piú propriamente chiamare velocità massima di propagazione delle interazioni. Essa determina soltanto quell'intervallo di tempo necessario affinché il cambiamento subíto da un corpo cominci a manifestarsi su un altro corpo. È evidente che l'esistenza di una velocità massima di propagazione delle interazioni significa anche che non può esistere nella natura un moto con velocità superiore a questa. In effetti, se tale moto potesse aver luogo, lo si potrebbe utilizzare per realizzare una interazione con velocità superiore alla velocità massima di propagazione delle interazioni.

Dell'interazione, che si propaga da una particella ad un'altra, si parla spesso come di un « segnale » emesso dall'una per « informare » l'altra circa un cambiamento da essa subíto. Si parla allora della velocità di propagazione delle interazioni come della « velocità di un segnale ».

Dal principio di relatività segue, in particolare, che la velocità di propagazione delle interazioni è la stessa in tutti i sistemi inerziali di riferimento. La velocità di propagazione delle interazioni è quindi una costante universale.

Come si vedrà in seguito, questa velocità costante è anche la velocità di propagazione della luce nel vuoto; per questo la chiamano *velocità della luce*. Essa viene indicata di solito con la lettera c, e il suo valore numerico è

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10}\ cm/s. \tag{1,1}$$

Il valore elevato di questa velocità spiega il fatto che nella maggioranza dei casi la meccanica classica è in pratica sufficientemente precisa. Le velocità con le quali abbiamo generalmente a che fare sono talmente piccole rispetto a c, che la precisione dei risultati praticamente non viene alterata se supponiamo la velocità della luce infinita.

Il principio di relatività, insieme al postulato dell'esistenza di una velocità limite di propagazione delle interazioni, è chiamato *principio di relatività di Einstein* (fu enunciato da Einstein nel 1905); ricordiamo qui che il principio di relatività di Galilei considera infinita la velocità di propagazione delle interazioni.

La meccanica basata sul principio di relatività di Einstein (lo chiameremo semplicemente principio di relatività) è detta *relativistica*. Nel caso limite in cui le velocità dei corpi in moto sono piccole rispetto alla velocità della luce, si può trascurare l'effetto di una velocità limite di propagazione delle interazioni sul moto. La meccanica relativistica coincide allora con la meccanica ordinaria che parte dall'ipotesi che la propagazione delle interazioni sia istantanea; questa meccanica si chiama newtoniana o classica. Il passaggio limite dalla meccanica relativistica alla meccanica classica può essere effettuato formalmente ponendo nelle formule della meccanica relativistica $c \to \infty$.

Già in meccanica classica lo spazio è relativo, cioè le relazioni spaziali tra differenti eventi dipendono soltanto dal sistema di riferimento nel quale vengono descritti. L'asserzione che due eventi avvengono ad istanti differenti in uno stesso punto dello spazio o, in generale, ad una determinata distanza l'uno dall'altro, acquista un senso soltanto se è indicato il sistema di riferimento al quale questa asserzione si riferisce.

Il tempo in meccanica classica è invece assoluto; in altri termini, si suppone che le proprietà del tempo non dipendano dal sistema di riferimento; il tempo è identico per tutti i sistemi di riferimento. Ciò significa che se due eventi arbitrari sono simultanei per un osservatore, essi sono ugualmente simultanei per ogni altro osservatore. In generale, l'intervallo di tempo tra due eventi dati dev'essere identico in tutti i sistemi di riferimento.

È facile a questo punto convincersi quanto sia profonda la contraddizione tra il concetto di tempo assoluto e il principio einsteiniano di relatività. È sufficiente ricordare a questo proposito che in meccanica classica, fondata sul concetto di tempo assoluto, è valida la legge universalmente nota di composizione delle velocità secondo la quale la velocità di un moto composto è semplicemente uguale alla somma (vettoriale) delle velocità componenti. Essendo universale, questa legge dovrebbe essere applicabile anche alla propagazione delle interazioni. Risulterebbe allora che la velocità di propagazione in diversi sistemi di riferimento deve essere diversa, ciò che è in disaccordo con il principio di relatività. L'esperienza però conferma interamente sotto questo aspetto il principio di relatività. Le misure eseguite per la prima volta da Michelson (1881) rivelarono la totale indipendenza della velocità della luce dalla direzione della sua propagazione; secondo i postulati della meccanica classica, la velocità della luce nel verso della traslazione della Terra dovrebbe essere differente dalla velocità nel verso opposto.

Cosí, il principio di relatività conduce a risultati secondo i quali il tempo non è assoluto. Il tempo scorre diversamente in diversi sistemi di riferimento. Di conseguenza, l'asserzione che due eventi dati sono separati da un intervallo di tempo determinato acquista un significato solo se è indicato il sistema di riferimento al quale si riferisce questa asserzione. In particolare, gli eventi simultanei in un certo sistema di riferimento non lo saranno in un altro sistema.

Per illustrare questo fatto, facciamo un esempio semplice.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali K e K' con rispettivi assi coordinati xyz ed $x'y'z'$; il sistema inerziale K' si sposta rispetto al sistema K verso destra lungo gli assi x ed x' (fig. 1).

Supponiamo che da un punto A sull'asse x' vengano emessi segnali in due direzioni opposte. Siccome la velocità di propagazione del

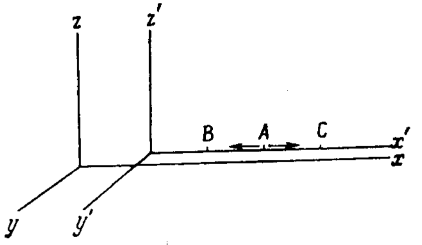

Fig. 1

segnale nel sistema K', come in qualsiasi altro sistema inerziale, è la stessa in ambedue le direzioni ed è uguale a c, i segnali giungeranno nei punti B e C equidistanti da A in uno stesso istante (nel sistema K').

Tuttavia, è facile vedere che questi due eventi (arrivo del segnale in B e C) non saranno affatto simultanei per un osservatore che si trovi nel sistema K. In effetti, la velocità dei segnali relativamente al sistema K, in accordo con il principio di relatività, è sempre uguale a c, e poiché il punto B si muove (relativamente al sistema K) incontro al segnale emesso, mentre il punto C si allontana dal segnale (emesso da A verso C), nel sistema K il segnale arriverà prima nel punto B e poi nel punto C.

Quindi il principio di relatività di Einstein introduce cambiamenti fondamentali nei concetti principali della fisica. I concetti di spazio e di tempo che abbiamo appreso dall'esperienza di tutti i giorni sono approssimativi poiché nella vita comune noi abbiamo a che fare soltanto con velocità molto piccole rispetto alla velocità della luce.

§ 2. *Intervallo*

Useremo spesso in seguito il concetto di *evento*. Un evento è definito dal punto e dall'istante in cui avviene. Un evento relativo ad una particella materiale è quindi determinato dalle

tre coordinate di questa particella e dall'istante in cui esso si è verificato.

Per ragioni di chiarezza, è talvolta comodo utilizzare un immaginario spazio quadridimensionale sui cui assi si pongono le tre coordinate spaziali e il tempo. In questo spazio un evento sarà rappresentato da un punto. Tali punti sono detti *punti d'universo*. Ad ogni particella corrisponde una certa linea (*linea d'universo*) in questo spazio quadridimensionale. I punti di questa linea definiscono le coordinate della particella in tutti gli istanti. Una particella materiale in moto rettilineo uniforme ha per linea d'universo una retta.

Traduciamo ora il principio d'invarianza della velocità della luce in linguaggio matematico. A tale scopo consideriamo due sistemi di riferimento K e K' che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante. Scegliamo gli assi coordinati in modo tale che gli assi x ed x' coincidano, e gli assi y e z siano paralleli agli assi y' e z'; indichiamo con t e t' il tempo rispettivamente nei sistemi K e K'.

Supponiamo che il primo evento consista nell'emissione di un segnale che si propaga alla velocità della luce da un punto con coordinate x_1, y_1, z_1 all'istante t_1 nel sistema di riferimento K. Osserveremo la propagazione di questo segnale dal sistema K. Supponiamo che il secondo evento consista nell'arrivo del segnale nel punto x_2, y_2, z_2 all'istante t_2. La velocità di propagazione del segnale è c e, di conseguenza, il cammino percorso è uguale a $c\,(t_2-t_1)$. D'altra parte, questa stessa distanza è $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Quindi possiamo scrivere la seguente relazione tra le coordinate di entrambi gli eventi nel sistema K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2\,(t_2-t_1)^2=0. \qquad (2,1)$$

Gli stessi eventi, ossia la propagazione del segnale, si possono osservare anche dal sistema K'. Siano x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 le coordinate del primo evento nel sistema K', e x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 quelle del secondo evento. Essendo la velocità della luce la stessa in K ed in K', abbiamo una relazione analoga alla (2,1):

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2\,(t'_2-t'_1)^2=0. \qquad (2,2)$$

Se x_1, y_1, z_1, t_1 ed x_2, y_2, z_2, t_2 sono le coordinate di due eventi arbitrari, la grandezza

$$s_{12}=[c^2\,(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \qquad (2,3)$$

si chiama *intervallo* tra questi due eventi.

Dall'invarianza della velocità della luce deriva quindi che se l'intervallo di due eventi è nullo in un sistema di riferimento, esso sarà nullo in qualsiasi altro sistema.

Se due eventi sono infinitamente vicini, il loro intervallo ds si scrive:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2,4}$$

La forma dell'espressione (2,3) o (2,4) permette di considerare l'intervallo dal punto di vista matematico formale come la distanza tra due punti in un immaginario spazio quadridimensionale (sui cui assi poniamo x, y, z e il prodotto ct). Esiste, tuttavia, una differenza sostanziale tra l'espressione di questa grandezza nello spazio quadridimensionale e l'espressione corrispondente nella geometria ordinaria: il quadrato dell'intervallo si ottiene sommando i quadrati delle differenze delle coordinate rispetto ai diversi assi con segni diversi anziché con segni uguali[1]).

Come abbiamo accennato sopra, se $ds = 0$ in un sistema di riferimento inerziale, si ha $ds' = 0$ anche in un altro sistema. D'altra parte, ds e ds' sono infinitesimi dello stesso ordine. Da queste considerazioni segue che ds^2 e ds'^2 debbono essere proporzionali:

$$ds^2 = a\, ds'^2,$$

dove il coefficiente a può dipendere solamente dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. Esso non può dipendere dalle coordinate e dal tempo; in caso contrario i differenti punti dello spazio e del tempo non sarebbero piú equivalenti, cosa che è in disaccordo con l'uniformità dello spazio e del tempo. Esso non può dipendere neppure dalla direzione della velocità relativa perché ciò sarebbe in contraddizione con l'isotropia dello spazio.

Consideriamo ora tre sistemi di riferimento K, K_1, K_2 e supponiamo che $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ siano le velocità del moto di K_1 e K_2 rispetto a K. Abbiamo allora:

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2.$$

Per la stessa ragione possiamo scrivere:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

dove V_{12} è il valore assoluto della velocità di K_2 rispetto a K_1.

Confrontando queste relazioni, otteniamo:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{2,5}$$

La grandezza V_{12} dipende non soltanto dai valori assoluti dei vettori $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, ma anche dall'angolo che essi formano. Questo angolo non entra affatto nel primo membro della relazione (2,5). Ne segue dunque che questa relazione può essere valida soltanto se la funzione

[1]) La geometria quadridimensionale definita dalla formula quadratica (2,4) è detta *non euclidea* a differenza della geometria euclidea ordinaria. Essa fu introdotta in relazione alla teoria della relatività da *H. Minkowski*.

$a(V)$ si riduce ad una costante, uguale a 1, come risulta dalla stessa relazione.

Abbiamo dunque

$$ds^2 = ds'^2, \tag{2,6}$$

e dall'uguaglianza di intervalli infinitesimi segue l'uguaglianza anche di intervalli finiti: $s = s'$.

Abbiamo ottenuto cosí un risultato di estrema importanza: l'intervallo fra due eventi è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali, cioè è un invariante rispetto alla trasformazione di un sistema di riferimento inerziale in un qualsiasi altro. Questa invarianza è dunque l'espressione matematica della costanza della velocità della luce.

Supponiamo ancora che x_1, y_1, z_1, t_1 ed x_2, y_2, z_2, t_2 siano le coordinate di due eventi in un sistema di riferimento K. Si domanda se esiste un sistema di riferimento K' nel quale questi due eventi coincidono nello spazio.

Poniamo

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Il quadrato dell'intervallo tra gli eventi nel sistema K è allora:

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2$$

e nel sistema K':

$$s_{12}'^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

e, in virtú dell'invarianza dell'intervallo,

$$c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Vogliamo che nel sistema K' i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, cioè che $l'_{12} = 0$. Allora

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 > 0.$$

Di conseguenza, il sistema cercato esiste se $s_{12}^2 > 0$, cioè se l'intervallo fra i due eventi è reale. Gli intervalli reali sono detti *del genere tempo*.

Se l'intervallo tra due eventi è del genere tempo, esiste allora un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono avvenuti in uno stesso punto. Il tempo trascorso tra questi eventi in questo sistema è:

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,7}$$

Quando i due eventi sono relativi allo stesso corpo, il loro intervallo è sempre del genere tempo. In effetti, lo spazio percorso dal corpo tra i due eventi non può essere superiore a ct_{12}, non potendo la velocità del corpo superare c. Quindi si ha sempre

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Vediamo ora se è possibile trovare un sistema di riferimento tale che i due eventi siano simultanei. Come nel caso precedente per i sistemi K e K' si ha: $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Vogliamo che $t'_{12} = 0$; quindi

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Di conseguenza, il sistema cercato può essere trovato solo nel caso in cui l'intervallo s_{12} tra i due eventi è immaginario. Gli intervalli immaginari sono detti *del genere spazio*.

In tal modo, se l'intervallo tra i due eventi è del genere spazio, esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono simultanei. La distanza tra i punti dove questi eventi hanno avuto luogo in questo sistema è:

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \tag{2,8}$$

La classificazione in intervalli del genere tempo e spazio è, in virtú della loro invarianza, un concetto assoluto. Ciò significa

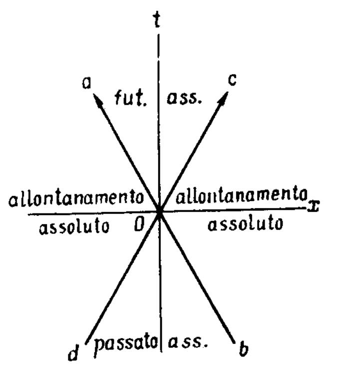

Fig. 2

che la proprietà di un intervallo di essere del genere tempo o spazio non dipende dal sistema di riferimento.

Prendiamo un evento qualunque — chiamiamolo évento O — come origine del tempo e delle coordinate spaziali. In altri termini, il punto d'universo O sarà l'origine delle coordinate nel sistema quadridimensionale sui cui assi poniamo x, y, z, t. Vediamo ora quali sono le relazioni del dato evento O con tutti gli altri eventi. Per fissare le idee, prendiamo una sola coordinata spaziale e il tempo ponendoli sui due assi (fig. 2). Il moto rettilineo uniforme di una particella

che passa per il punto $x = 0$ per $t = 0$ sarà rappresentato da una retta passante per O e formante con l'asse delle t un angolo la cui tangente è uguale alla velocità della particella. Essendo c la piú grande velocità possibile, esiste allora un angolo massimo che questa retta può formare con l'asse delle t. Nella fig. 2 sono tracciate due rette che rappresentano la propagazione di due segnali (alla velocità della luce) in due direzioni opposte passanti per l'evento O (cioè passanti per il punto $x = 0$ quando $t = 0$). Tutte le rette rappresentanti il moto di particelle possono trovarsi soltanto all'interno delle regioni aOc e dOb. Sulle rette ab e cd abbiamo, evidentemente, $x = \pm ct$. Consideriamo dapprima eventi i cui punti d'universo si trovano all'interno della regione aOc. È facile vedere che in tutti i punti di questa regione $c^2t^2 - x^2 > 0$. In altre parole, gli intervalli tra un qualsiasi evento di questa regione e l'evento O sono del genere tempo. Essendo in questa regione $t > 0$, tutti gli eventi in essa avvengono « dopo » l'evento O. Due eventi separati da un intervallo del genere tempo non possono essere simultanei in alcun sistema di riferimento. Di conseguenza, non è neppure possibile trovare un sistema di riferimento dove qualche evento della regione aOc avvenga « prima » dell'evento O, cioè che si abbia $t < 0$. In tal modo, tutti gli eventi della regione aOc sono posteriori ad O, a prescindere dal sistema di riferimento. Questa regione può quindi essere chiamata regione del « futuro assoluto » rispetto all'evento O.

Analogamente, tutti gli eventi della regione bOd sono nel « passato assoluto » rispetto all'evento O, cioè gli eventi di questa regione sono anteriori ad O in tutti i sistemi di riferimento.

Consideriamo infine le regioni dOa e cOb. L'intervallo tra qualsiasi evento di queste regioni e l'evento O è del genere spazio. Qualunque sia il sistema di riferimento, questi eventi avvengono sempre in differenti punti dello spazio. Queste regioni si possono quindi chiamare « regioni di allontanamento assoluto » rispetto ad O. Tuttavia, i concetti di « simultaneo », « prima » e « dopo » per gli eventi di queste regioni sono relativi. Per ogni evento di queste regioni esistono sistemi di riferimento dove esso è posteriore ad O, altri sistemi dove esso è anteriore ad O ed, infine, un sistema di riferimento dove esso è simultaneo ad O.

Notiamo che se si considerano tutte e tre le coordinate spaziali invece di una sola, in luogo di due rette intersecantisi nella fig. 2 si avrebbe un « cono » $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ nel sistema quadridimensionale con coordinate x, y, z, t; l'asse del cono (chiamato *cono di luce*) coincide con l'asse delle t. Le regioni del « futuro assoluto » e del « passato assoluto » sono rappresentate allora dalle due falde interne di questo cono, rispettivamente.

Due eventi possono essere legati da un rapporto di causalità soltanto nel caso in cui il loro intervallo sia del genere tempo. Questo risultato segue immediatamente dall'impossibilità che qualche interazione si propaghi piú velocemente della luce. Come abbiamo appena visto, i concetti di « prima » e « dopo » hanno un senso assoluto solo per questi eventi; questa è una condizione indispensabile perché i concetti di causa e di effetto abbiano senso.

§ 3. *Tempo proprio*

Supponiamo di osservare da un sistema di riferimento inerziale un orologio animato da un moto arbitrario rispetto a noi. In ogni istante questo moto può essere considerato uniforme. Possiamo quindi in ogni istante fissare rigidamente all'orologio un sistema di coordinate che sarà (con l'orologio) un sistema di riferimento inerziale.

In un intervallo di tempo infinitesimo dt (secondo un orologio fisso che si trova cioè nel nostro sistema di riferimento) l'orologio in movimento percorre la distanza

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Si domanda: quale sarà l'intervallo di tempo dt' indicato dall'orologio in moto? Nel sistema di coordinate legato all'orologio in movimento quest'ultimo è fermo, cioè $dx' = dy' = dz' = 0$. In virtú dell'invarianza dell'intervallo,

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\, dt'^2,$$

donde

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2\, dt^2}}.$$

Ma

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

dove v è la velocità dell'orologio in moto; perciò

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}}. \tag{3,1}$$

L'integrazione di questa espressione dà l'intervallo di tempo indicato dall'orologio in movimento, quando l'orologio fisso indicherà il tempo $t_2 - t_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Il tempo indicato da un orologio, solidale con un corpo dato, è detto *tempo proprio* di questo corpo. Le formule (3,1) e (3,2) esprimono il tempo proprio in funzione del tempo misurato nel sistema di riferimento rispetto al quale si considera il moto.

Come risulta dalle formule (3,1) e (3,2), il tempo proprio di un corpo in moto è sempre minore del corrispondente intervallo di tempo nel sistèma fisso. In altri termini, un orologio in moto va piú lentamente di un orologio fisso.

Supponiamo ora di avere un altro orologio in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale K. Il sistema K' solidale con il secondo orologio è anch'esso inerziale. Allora, l'orologio del sistema K', dal punto di vista di un osservatore nel sistema K, ritarda rispetto all'orologio dell'osservatore. E al contrario, dal punto di vista del sistema K', ritarda l'orologio nel sistema K. Per convincerci che non esiste alcuna contraddizione, consideriamo il seguente fatto. Per costatare che l'orologio di K' ritarda su quello di K, procediamo nel modo seguente. Supponiamo che in un certo istante l'orologio di K' incontri quello di K e che in questo istante essi indichino lo stesso tempo. Per confrontare l'andatura degli orologi di K e di K', bisogna nuovamente confrontare le indicazioni dell'orologio di K' con un secondo orologio di K, ossia con quello incontrato dall'orologio di K' in un altro istante. Si scopre cosí che l'orologio di K' ritarda sull'orologio di K con quale viene confrontato. Per poter confrontare l'andatura degli orologi in due sistemi di riferimento, occorrono quindi piú orologi in un sistema e un orologio in un altro sistema.

Risulta perciò che questo processo non è simmetrico rispetto ai due sistemi considerati. In ritardo sarà sempre l'orologio che viene confrontato con differenti orologi dell'altro sistema di riferimento.

Se si prendono due orologi uno dei quali descrive una traiettoria chiusa per tornare alla posizione iniziale (dove si trova l'orologio fisso), risulterà in ritardo proprio l'orologio in moto (rispetto a quello rimasto fisso). Il ragionamento inverso, nel quale i ruoli degli orologi vengono invertiti, non è valido perché l'orologio descrivente la traiettoria chiusa non compie un moto rettilineo e uniforme, e il sistema di riferimento relativo ad esso non è inerziale.

Siccome le leggi della natura sono identiche soltanto in sistemi di riferimento inerziali, i sistemi di riferimento relativi all'orologio fisso (sistema inerziale) e a quello in moto (sistema non inerziale) possiedono proprietà differenti, e il ragionamento secondo il quale l'orologio fisso dovrebbe ritardare è sbagliato.

L'intervallo di tempo indicato da un orologio è uguale all'integrale $\frac{1}{c}\int ds$ preso lungo la linea d'universo di questo orologio. Se l'orologio è fisso, la sua linea d'universo è una retta parallela all'asse del tempo; se invece l'orologio compie un moto non uniforme lungo una traiettoria chiusa e ritorna alla posizione di partenza, la sua linea d'universo è una curva passante per due punti sulla retta d'universo di un orologio fisso, corrispondenti all'inizio ed alla fine del moto. D'altra parte, abbiamo visto che il tempo indicato da un orologio in quiete è sempre maggiore di quello di un orologio in moto. Si arriva quindi alla conclusione che l'integrale $\int ds$ preso tra due punti d'universo dati ha un valore massimo quando è esteso alla retta d'universo che congiunge questi due punti[1]).

§ 4. *Trasformazione di Lorentz*

Ci proponiamo ora di trovare le formule di trasformazione da un sistema di riferimento inerziale in un altro, cioè le formule che permettono, conoscendo le coordinate x, y, z, t di un evento in un sistema di riferimento K, di trovare le coordinate x', y', z', t' dello stesso evento in un altro sistema inerziale K'.

Questo problema in meccanica classica si risolve molto facilmente. Essendo il tempo assoluto, abbiamo $t = t'$; scegliendo poi le coordinate nel modo solito (facendo cioè coincidere gli assi x ed x', mentre gli assi y, z restano paralleli a y', z' e il moto avviene lungo gli assi x ed x'), le coordinate y e z saranno evidentemente uguali alle coordinate y' e z', mentre le coordinate x ed x' differiranno per la distanza percorsa da un sistema rispetto all'altro; se come origine del tempo si prende l'istante in cui i due sistemi delle coordinate coincidono e se si indica con V la velocità di K' rispetto a K, questa distanza sarà allora Vt. Quindi si ha:

$$x = x' + Vt,\ y = y',\ z = z',\ t = t'. \tag{4,1}$$

Queste sono le formule di *trasformazione di Galilei*. È facile verificare che questa trasformazione, come c'era da aspettarsi, non soddisfa la condizione della teoria della relatività: essa non lascia invariante l'intervallo tra due eventi.

Per cercare le formule di trasformazione relativistiche, partiremo dal requisito che esse lascino invarianti gli intervalli.

Come abbiamo visto nel § 2, l'intervallo tra due eventi si può considerare come la distanza tra i due punti d'universo corrispondenti in un sistema di coordinate quadridimensionale. Possiamo dunque affermare che la trasformazione cercata deve lasciare inalterate tutte le lunghezze nello spazio quadridimensionale x, y, z, t, ct. Tali trasformazioni non possono essere che traslazioni e rotazioni del sistema di coordinate. Le traslazioni del sistema di coordinate non presentano

[1]) Si suppone naturalmente che questi punti e le linee che li congiungono siano tali che tutti gli elementi ds su queste linee sono del genere tempo.
Questa proprietà dell'integrale è dovuta al carattere non euclideo della geometria quadridimensionale. In uno spazio euclideo questo integrale sarebbe minimo lungo una retta.

alcun interesse perché si riducono ad un semplice spostamento dell'origine delle coordinate spaziali e ad un cambiamento dell'origine dei tempi. Quindi la trasformazione cercata dev'essere espressa matematicamente come rotazione di un sistema di coordinate quadridimensionale x, y, z, t.

Ogni rotazione in uno spazio quadridimensionale può essere scomposta in sei rotazioni rispettivamente nei piani xy, zy, xz, tx, ty, tz (analogamente una rotazione nello spazio ordinario può essere scomposta in tre rotazioni nei piani xy, zy ed xz). Le tre prime rotazioni trasformano solo le coordinate spaziali; esse corrispondono quindi alle rotazioni ordinarie nello spazio euclideo.

Consideriamo una trasformazione nel piano tx; le coordinate y e z restano invariate. In particolare, questa trasformazione deve lasciare invariata la differenza $(ct)^2 - x^2$, ossia il quadrato della « distanza » del punto (ct, x) dall'origine delle coordinate. La relazione tra le vecchie e le nuove coordinate in questa trasformazione è data dalle formule

$$x = x' \operatorname{ch}\psi + ct' \operatorname{sh}\psi,\quad ct = x' \operatorname{sh}\psi + ct' \operatorname{ch}\psi, \tag{4,2}$$

dove ψ è l'« angolo di rotazione »; è semplice verificare l'uguaglianza $c^2t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Le formule (4,2) si differenziano dalle formule ordinarie di trasformazione nella rotazione degli assi coordinati per la sostituzione delle funzioni trigonometriche con quelle iperboliche. In questo si manifesta la differenza della geometria non euclidea dalla geometria euclidea. Le formule che cerchiamo sono le formule di trasformazione che permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale K ad un sistema K' che si muove rispetto a K lungo l'asse x con velocità V. In questo caso è evidente che sono soggetti alla trasformazione soltanto la coordinata x ed il tempo t. Questa trasformazione deve avere la forma (4,2). Resta da determinare l'angolo ψ che può dipendere solo dalla velocità relativa V[1]).

Consideriamo il moto dell'origine delle coordinate di K' nel sistema K. Allora $x' = 0$, e le formule (4,2) si scrivono

$$x = ct' \operatorname{sh}\psi,\quad ct = ct' \operatorname{ch}\psi,$$

o, dividendo membro a membro,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\psi.$$

dove x/t è evidentemente la velocità del sistema K' rispetto a K. Si ha quindi

$$\operatorname{th}\psi = \frac{V}{c},$$

[1]) Per evitare confusione, indicheremo ovunque con V la velocità relativa costante tra due sistemi inerziali e con v la velocità di una particella in moto, che non è necessariamente costante.

da cui

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Sostituendo queste ultime espressioni nella (4,2), troviamo:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4,3}$$

Queste sono le formule di trasformazione cercate, che sono chiamate formule di *trasformazione di Lorentz*. Queste formule saranno in seguito di importanza fondamentale.

Le formule inverse, esprimenti x', y', z', t' mediante x, y, z, t, si possono ottenere semplicemente operando la sostituzione di V con $-V$ (poiché in questo caso il sistema K si muove relativamente a K' con velocità $-V$). Le stesse formule si possono ottenere direttamente risolvendo le equazioni (4,3) rispetto ad x', y', z', t'.

Dalla (4,3) è facile vedere che, quando si passa alla meccanica classica per $c \to \infty$, le formule di trasformazione di Lorentz si riducono effettivamente alla trasformazione di Galilei.

Se nelle formule (4,3) $V > c$, le coordinate x, t diventano immaginarie; questo corrisponde all'impossibilità di un moto con velocità superiore a quella della luce. Non è nemmeno possibile avere un sistema di riferimento che si muova ad una velocità uguale a quella della luce perché i denominatori delle formule (4,3) si annullerebbero.

Per velocità V, piccole rispetto alla velocità della luce, in luogo delle (4,3) si possono utilizzare le formule approssimate

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \tag{4,4}$$

Consideriamo ora un'asta in quiete nel sistema K e disposta parallelamente all'asse x. Sia $\Delta x = x_2 - x_1$ (dove x_2 ed x_1 sono le coordinate delle estremità dell'asta nel sistema K) la sua lunghezza misurata in questo sistema. Cerchiamo ora la sua lunghezza nel sistema K'. A tale scopo bisogna trovare le coordinate delle due estremità (x_2' ed x_1') in questo sistema allo stesso istante t'. Dalle (4,3) abbiamo:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

La lunghezza dell'asta nel sistema K' è $\Delta x' = x_2' - x_1'$ e si ottiene sottraendo x_2 da x_1:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Si chiama *lunghezza propria* di un'asta la sua lunghezza nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. Indicando con $l_0 = \Delta x$ la lunghezza propria e con l la lunghezza della stessa asta misurata nel sistema K', otteniamo la relazione:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Da questa formula è chiaro che la lunghezza dell'asta è maggiore nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. La sua lunghezza, in un sistema in cui si muove con la velocità V, diminuisce nel rapporto di $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Questo risultato della teoria della relatività si chiama *contrazione di Lorentz*.

Poiché le dimensioni trasversali di un corpo in moto non cambiano, il suo volume $\mathscr{V}$ si riduce allo stesso modo:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

dove $\mathscr{V}_0$ è il *volume proprio* del corpo.

Le trasformazioni di Lorentz ci permettono di trovare i già noti risultati, relativi al tempo proprio (§ 3). Consideriamo un orologio in quiete nel sistema K'. Siano dati due eventi che accadono in uno stesso punto x', y', z' dello spazio nel sistema K'. Il tempo che separa questi eventi nel sistema K' è $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Cerchiamo ora il tempo Δt che separa gli stessi eventi nel sistema K. Dalle (4,3) abbiamo:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

o, sottraendo l'uno dall'altro,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

che è in pieno accordo con la (3,1).

Notiamo infine ancora una proprietà delle trasformazioni di Lorentz, che le distingue dalle trasformazioni di Galilei. Quest'ultime possiedono, come si dice, la proprietà commutativa, cioè il prodotto di due trasformazioni di Galilei successive (con differenti velocità $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$) non dipende dall'ordine nel quale queste trasformazioni sono effettuate. Al contrario, il prodotto di due trasformazioni di Lorentz successive dipende, in generale, dal loro ordine di successione. Da un punto di vista puramente matematico, questo è una conseguenza dell'interpretazione formale di queste trasformazioni come rotazioni di un sistema quadridimensionale di coordinate: è notorio che il risultato di due rotazioni (intorno ad assi differenti) dipende dall'ordine nel quale esse sono effettuate. Fanno eccezione soltanto le trasformazioni con vettori $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ paralleli (esse sono equivalenti a rotazioni di un sistema quadridimensionale di coordinate intorno allo stesso asse).

§ 5. *Trasformazione della velocità*

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato le formule che permettono di trovare, conoscendo le coordinate di un evento in un sistema di riferimento, le coordinate dello stesso evento in un altro sistema di riferimento. Stabiliamo ora le formule che legano le velocità di una particella materiale in sistemi di riferimento distinti.

Supponiamo ancora una volta che il sistema K' si muova relativamente al sistema K con velocità V lungo l'asse x. Siano $v_x = dx/dt$ la componente della velocità di una particella nel sistema K e $v'_x = dx'/dt'$ la componente della velocità della stessa particella nel sistema K'.

Dalla (4,3) otteniamo:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad dy = dy', \; dz = dz, \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Dividendo le prime tre uguaglianze per la quarta ed introducendo le velocità

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

troviamo:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}. \tag{5,1}$$

Queste sono le formule di trasformazione delle velocità. Esse esprimono la legge di composizione delle velocità nella teoria della relatività. Nel caso limite in cui $c \to \infty$, esse si trasformano nelle formule $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$ della meccanica classica.

Nel caso particolare in cui la particella si muove parallelamente all'asse x, abbiamo $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Allora $v'_y = v'_z = 0$, $v'_x = v'$ e

$$v = \frac{v' + V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

È facile verificare che questa somma di due velocità, inferiori o uguali alla velocità della luce, è sempre una velocità non superiore a quella della luce.

Per velocità V, notevolmente inferiori alla velocità della luce (la velocità v può essere arbitraria), con una approssimazione sino ai termini dell'ordine V/c abbiamo:

$$v_x = v'_x + V\left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \qquad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \qquad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Queste tre formule si possono riunire in una sola formula vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'. \tag{5,3}$$

Notiamo che le due velocità componenti $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{V}$ entrano nella legge relativistica di composizione delle velocità (5,1) in modo asimmetrico (quando esse non sono dirette tutte e due parallelamente all'asse x). Questo fatto è dovuto naturalmente alla non commutatività delle trasformazioni di Lorentz menzionata nel paragrafo precedente.

Scegliamo gli assi coordinati in maniera tale che la velocità della particella in un istante dato appartenga al piano xy. Le sue componenti nel sistema K saranno allora $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta$, e nel sistema K', rispettivamente, $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\,\mathrm{sen}\,\theta'$ (v, v' e θ, θ' sono i valori assoluti della velocità e gli angoli che essa forma con gli assi x ed x' rispettivamente nei sistemi K e K'). Con l'aiuto delle formule (5,1) troviamo:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5,4}$$

Questa formula determina il cambiamento di direzione della velocità nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro.

Consideriamo piú in dettaglio un caso particolarmente importante di questa formula, ossia la deviazione della luce nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, fenomeno detto *aberrazione* della luce. In questo caso si ha $v = v' = c$, e la formula precedente assume la forma:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c}+\cos\theta'}\operatorname{sen}\theta'. \qquad (5,5)$$

Le stesse formule di trasformazione (5,1) ci permettono di ottenere facilmente una relazione analoga tra sen θ e cos θ:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\operatorname{sen}\theta', \qquad \cos\theta=\frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \qquad (5,6)$$

Nel caso in cui $V\ll c$, dalla (5,6) con una approssimazione sino ai termini d'ordine V/c ricaviamo:

$$\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta'=-\frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta'\cos\theta'.$$

Introducendo l'angolo $\Delta\theta=\theta'-\theta$ (angolo di aberrazione), troviamo con la stessa approssimazione

$$\Delta\theta=\frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta' \qquad (5,7)$$

che è la formula elementare ben nota dell'aberrazione della luce.

§ 6. *Quadrivettori*

L'insieme delle coordinate (ct, x, y, z) di un evento può essere considerato come le componenti di un raggio vettore quadridimensionale (o, per brevità, raggio quadrivettore) nello spazio quadridimensionale. Indicheremo con x^i le sue componenti, dove l'indice i assume i valori 0, 1, 2, 3 e dove

$$x^0=ct,\ x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z.$$

Il quadrato della « lunghezza » di un raggio quadrivettore è dato dall'espressione

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2.$$

Esso non varia per trasformazioni qualsivogliono del sistema di coordinate quadridimensionale, quali sono in particolare le trasformazioni di Lorentz.

In generale, si chiama *quadrivettore* (4-vettore) A^i l'insieme di quattro grandezze A^0, A^1, A^2, A^3, che si trasformano come le componenti x^i di un raggio quadrivettore per trasformazioni del sistema di coordinate quadridimensionale. Le trasformazioni di Lorentz ci

danno:

$$A^0=\frac{A'^0+\frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A^1=\frac{A'^1+\frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A^2=A'^2,\ A^3=A'^3. \qquad (6,1)$$

Il quadrato del valore di ogni quadrivettore è definito analogamente al quadrato di un raggio quadrivettore

$$(A^0)^2-(A^1)^2-(A^2)^2-(A^3)^2.$$

Per rendere piú comoda la scrittura di tali espressioni, introduciamo due « tipi » di componenti dei quadrivettori indicandole rispettivamente con A^i ed A_i aventi l'indice in alto e in basso. Teniamo intanto presente che

$$A_0=A^0,\quad A_1=-A^1,\quad A_2=-A^2,\quad A_3=-A^3. \qquad (6,2)$$

Le grandezze A^i sono dette componenti *controvarianti* ed A_i componenti *covarianti* del quadrivettore. Il quadrato di un quadrivettore assume allora la forma

$$\sum_{i=0}^{3}A^iA_i=A^0A_0+A^1A_1+A^2A_2+A^3A_3.$$

Queste somme si scrivono di solito nella forma A^iA_i, omettendo il segno di somma. Si adotta in generale la regola secondo la quale con ogni indice ripetuto due volte in una data espressione si sottintende la sommatoria, ma il segno di somma va omesso. Inoltre, in ogni coppia di indici uguali uno deve essere scritto superiormente e l'altro inferiormente. Questo modo di esprimere una sommatoria su indici detti *muti* è molto comodo e semplifica notevolmente la scrittura delle formule.

Nel presente volume con le lettere latine $i, k, l, \ldots$ indicheremo gli indici quadridimensionali che assumono i valori 0, 1, 2, 3.

Per analogia con il quadrato di un quadrivettore il prodotto scalare tra due differenti quadrivettori si definisce:

$$A^iB_i=A^0B_0+A^1B_1+A^2B_2+A^3B_3.$$

È peraltro evidente che questo prodotto si può denotare sia con A^iB_i che con A_iB^i, senza cambiarne il risultato. Secondo una regola piú generale gli indici superiori ed inferiori in ogni coppia di indici muti possono sempre essere scambiati di posto[1]).

Il prodotto A^iB_i è un 4-scalare: esso è invariante rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate quadridimensionale. È facile

[1]) Nelle pubblicazioni moderne si omettono generalmente gli indici dei quadrivettori, indicando quadrati e prodotti scalari semplicemente con A^2, AB. Nel presente volume tuttavia non adotteremo questo tipo di notazioni.

verificare direttamente questa affermazione[1]), che risulta evidente (per analogia con il quadrato A^iA_i) anche dal fatto che tutti i quadrivettori si trasformano secondo la stessa legge.

La componente A^0 di un quadrivettore si chiama temporale, e le componenti A^1, A^2, A^3 spaziali (per analogia con il raggio quadrivettore). Il quadrato di un quadrivettore può essere positivo, negativo o nullo; si parla allora rispettivamente di quadrivettori *del genere tempo*, *del genere spazio* e *nulli o del genere luce* (la terminologia è la stessa usata per gli intervalli)[2]).

Rispetto alle rotazioni puramente spaziali (cioè alle trasformazioni che non interessano l'asse del tempo) le tre componenti spaziali del quadrivettore A^i compongono un vettore tridimensionale $\mathbf{A}$, mentre la quarta componente temporale del quadrivettore rappresenta (rispetto alle stesse trasformazioni) uno scalare a tre dimensioni. Elencando le componenti di un quadrivettore, spesso useremo la seguente notazione:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}),$$

mentre le componenti covarianti dello stesso quadrivettore si scriveranno: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$ e il quadrato del quadrivettore: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Quindi per un raggio quadrivettore avremo

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^ix_i = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Poiché non c'è nessun bisogno di distinguere nei vettori tridimensionali (in coordinate x, y, z) le componenti covarianti e controvarianti, ovunque denoteremo (laddove ciò non generi confusione) le sue componenti A_α ($\alpha = x, y, z$) con indici inferiori usando le lettere greche. In particolare, con indici greci ripetuti due volte s'intenderà la sommatoria rispetto a tre valori x, y, z (ad esempio, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Si chiama tensore quadridimensionale (4-tensore) di rango 2 l'insieme di 16 grandezze A^{ik} che per trasformazione delle coordinate si trasformano come prodotti di componenti di due quadrivettori. Analogamente sono definiti i 4-tensori di rango superiore.

Le componenti dei tensori quadridimensionali di rango 2 possono essere di tre tipi: controvarianti A^{ik}, covarianti A_{ik} e miste $A^i{}_k$ (riguardo a quest'ultime bisogna distinguere $A^i{}_k$ da $A_k{}^i$, cioè tener sem-

---

[1]) È da tener presente che la legge di trasformazione di un quadrivettore, espressa mediante le componenti covarianti, si distingue (per il segno) dalla stessa legge espressa con le componenti controvarianti. Ad esempio, in luogo della (6,1) si avrà evidentemente:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c}A'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c}A'_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3.$$

[2]) I quadrivettori nulli si chiamano anche *isotropi*.

pre presente quale degli indici, il primo o il secondo, sta superiormente o inferiormente. I diversi tipi delle componenti sono legati dalla regola generale seguente: l'innalzamento o l'abbassamento dell'indice temporale (0) non cambia il segno della componente, mentre l'innalzamento o l'abbassamento dell'indice spaziale (1, 2, 3) ne cambia il segno. Per esempio:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \ldots,$$
$$A^0{}_0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \ldots$$

Rispetto alle trasformazioni puramente spaziali le nove componenti A^{11}, A^{12}, . . ., formano un tensore tridimensionale. Le tre componenti A^{01}, A^{02}, A^{03} e le tre componenti A^{10}, A^{20}, A^{30} formano vettori tridimensionali, e la componente A^{00} è uno scalare tridimensionale.

Il tensore A^{ik} si chiama simmetrico se $A^{ik} = A^{ki}$, e antisimmetrico se $A^{ik} = -A^{ki}$. Un tensore antisimmetrico ha tutte le componenti diagonali nulle (cioè le componenti A^{00}, A^{11}, . . .) perché, per esempio, dev'essere $A^{00} = -A^{00}$. Per un tensore simmetrico A^{ik} le componenti miste $A^i{}_k$ ed $A_k{}^i$ evidentemente coincidono; in questi casi scriveremo A^i_k mettendo gli indici l'uno sopra l'altro.

Ogni uguaglianza tensoriale deve contenere in ambo i membri indici liberi, ossia non muti, uguali ed ugualmente disposti (superiormente o inferiormente). Gli indici liberi nelle uguaglianze tensoriali si possono spostare (superiormente o inferiormente), ma è obbligatorio che vengano spostati contemporaneamente in tutti i termini dell'uguaglianza. Non è però « legittimo » uguagliare le componenti controvarianti o covarianti dei tensori diversi; tale uguaglianza, anche avvenuta per caso in qualche sistema di riferimento, non sarebbe valida in un altro sistema.

Con le componenti di ogni tensore A^{ik} si può formare uno scalare scrivendo la somma

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

(dove naturalmente $A^i{}_i = A_i{}^i$). Tale somma è chiamata *traccia* del tensore, e l'operazione *contrazione* o *semplificazione* del tensore.

Il prodotto scalare di due quadrivettori considerato sopra si presenta come un'operazione di contrazione: è la formazione dello scalare A^iB_i dal tensore A^iB_k. In generale, ogni contrazione per una coppia di indici diminuisce di 2 il rango del tensore. Per esempio, $A^i{}_{kli}$ è un tensore di rango due, $A^i{}_kB^k$ un 4-vettore, $A^{ik}{}_{ik}$ uno scalare, ecc. Si chiama 4-tensore unità il tensore δ^i_k definito dall'uguaglianza

$$\delta^k_i A^i = A^k \tag{6,3}$$

per qualsiasi quadrivettore A^i. È evidente che le componenti di questo tensore sono

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases} \tag{6,4}$$

La sua traccia è $\delta_i^i = 4$.

Innalzando o abbassando uno degli indici del tensore δ_i^k, si ottiene un tensore controvariante o covariante che indicheremo, rispettivamente, con g^{ik} o g_{ik}. I tensori g^{ik} e g_{ik}, detti *tensori metrici*, hanno componenti uguali che si possono rappresentare sotto forma di tabella:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6,5}$$

(l'indice i indica le righe e l'indice k le colonne nell'ordine 0, 1, 2, 3).

È evidente che

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \tag{6,6}$$

Possiamo quindi scrivere il prodotto scalare di due quadrivettori nella forma

$$A^i A_i = g_{ik}A^i A^k = g^{ik}A_i A_k. \tag{6,7}$$

I tensori δ_k^i, g_{ik}, g^{ik} sono particolari nel senso che le loro componenti sono uguali in tutti i sistemi di coordinate. Della stessa proprietà gode il tensore unità completamente antisimmetrico di rango quattro e^{iklm}, vale a dire il tensore le cui componenti differenti da zero sono uguali a ± 1 e cambiano di segno scambiando tra loro due indici qualsiasi. Dall'antisimmetria segue che tutte le componenti di questo tensore che hanno almeno due indici uguali sono nulle; sono differenti da zero soltanto quelle componenti nelle quali tutti e quattro gli indici sono diversi. Ponendo

$$e^{0123} = +1 \tag{6,8}$$

(e quindi $e_{0123} = -1$), tutte le componenti e^{iklm} differenti da zero sono uguali a $+1$ oppure a -1, a seconda che sia pari o dispari il numero di permutazioni (trasposizioni) necessario per riportare gli indici nella successione naturale 0, 1, 2, 3. Il numero di tali componenti è $4! = 24$. Perciò

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \tag{6,9}$$

Rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate le grandezze e^{iklm} si comportano come le componenti di un tensore; se invece una delle tre coordinate cambia di segno, le componenti e^{iklm}, essendo identiche in

tutti i sistemi di coordinate, non cambiano, mentre, come è noto, le componenti di un tensore dovrebbero cambiare di segno. Risulta quindi che e^{iklm} non è un tensore vero e proprio, ma uno pseudotensore. Gli *pseudotensori* di rango qualsiasi, in particolare gli *pseudoscalari*, si comportano come tensori in ogni trasformazione di coordinate, ad eccezione di quelle trasformazioni che non possono essere ridotte a rotazioni, ossia ad eccezione delle inversioni di assi non riducibili a rotazioni.

I prodotti $e^{iklm}e^{prst}$ formano un vero 4-tensore di rango otto; con la contrazione di una o piú coppie di indici esso si riduce a tensori di rango sei, quattro e due. Tutti questi tensori hanno una forma identica in ogni sistema di coordinate. Per guesto le loro componenti debbono esprimersi sotto forma di combinazioni di prodotti delle componenti del tensore unità δ_k^i, che è l'unico vero tensore le cui componenti sono identiche in tutti i sistemi. Tali combinazioni si compongono facilmente partendo dalle proprietà di simmetria rispetto alle trasposizioni degli indici, proprie di tali combinazioni[1]).

Se A^{ik} è un tensore antisimmetrico, il tensore A^{ik} e lo pseudotensore $A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm}A_{lm}$ sono detti *duali*. Analogamente $e^{iklm}A_m$ è uno pseudotensore antisimmetrico del terzo ordine, duale del vettore A^i. Il prodotto di due tensori duali $A^{ik}A^*_{ik}$ è evidentemente uno pseudoscalare.

In relazione a quanto appena esposto, ricordiamo qualche proprietà analoga dei vettori e dei tensori tridimensionali. Si chiama pseudotensore unità completamente antisimmentrico di rango tre un insieme di grandezze $e_{\alpha\beta\gamma}$ che cambiano di segno quando si traspone una coppia qualunque di indici. Sono differenti da zero soltanto le componenti di $e_{\alpha\beta\gamma}$ con i tre indici diversi. Ponendo la componente $e_{xyz} = 1$, le altre sono uguali ad 1 oppure a -1 a seconda che

---

[1]) Riportiamo qui a titolo di informazione le formule corrispondenti:

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}, \qquad e^{iklm}e_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2(\delta_p^i\delta_r^k - \delta_r^i\delta_p^k), \quad e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta_p^i.$$

Il risultato della contrazione completa data dalla (6,9) permette di verificare i coefficienti generali in queste formule.

La prima di queste formule dà come conseguenza:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}, \quad e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A,$$

dove A è il determinante composto di grandezze A_{ik}.

sia pari o dispari il numero di trasposizioni necessario per ricondurre la successione α, β, γ alla successione x, y, z[1]).

I prodotti $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ formano un vero tensore tridimensionale di rango sei e per questo si esprimono sotto forma di combinazioni di prodotti delle componenti del tensore unità tridimensionale $\delta_{\alpha\beta}$[2]).

Invertendo il sistema di coordinate, cioè cambiando di segno tutte le coordinate, cambiano di segno le componenti di un vettore tridimensionale ordinario. Vettori di questo tipo sono detti *polari*. Le componenti di un vettore, che può essere rappresentato come il prodotto vettoriale di due vettori polari, non cambiano di segno nell'inversione. Questi vettori sono chiamati *assiali*. Il prodotto scalare di un vettore polare e di un vettore assiale non è un vero scalare, ma uno pseudoscalare: esso cambia di segno nell'inversione delle coordinate. Un vettore assiale è uno pseudovettore, duale di un tensore antisimmetrico. Per esempio, se $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, si ha

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad \text{dove} \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Torniamo ai 4-tensori. Le componenti spaziali ($i, k, \ldots = 1, 2, 3$) di un 4-tensore antisimmetrico A^{ik} formano un tensore tridimensionale antisimmetrico rispetto alle trasformazioni puramente spaziali; secondo quanto detto sopra, le sue componenti si esprimono mediante le componenti di un vettore assiale tridimensionale. Le componenti A^{01}, A^{02}, A^{03} formano, invece, rispetto alle stesse trasformazioni un vettore tridimensionale polare. Le componenti di un 4-tensore antisimmetrico possono essere qui rappresentate dalla seguente tabella:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{6,10}$$

dove $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{a}$ sono rispettivamente un vettore polare e un vettore assiale rispetto alle trasformazioni spaziali. Per indicare le componenti di

---

[1]) L'invarianza delle componenti del 4-tensore e^{iklm} in rotazioni del sistema di coordinate quadridimensionale e l'invarianza delle componenti del 3-tensore $e_{\alpha\beta\gamma}$ in rotazioni degli assi coordinati spaziali rappresentano casi particolari della regola generale: ogni tensore completamente antisimmetrico di rango uguale al numero di dimensioni dello spazio, dove esso è definito, è invariante in rotazioni del sistema di coordinate in questo spazio.

[2]) Riportiamo le formule corrispondenti:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Contraendo questo tensore su una, due e tre coppie di indici, otteniamo:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

un 4-tensore antisimmetrico, le denoteremo:

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

le componenti covarianti dello stesso tensore saranno allora:

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Soffermiamoci, infine, su alcune operazioni differenziali ed integrali dell'analisi tensoriale quadridimensionale.

Il 4-gradiente dello scalare φ è il quadrivettore

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ \nabla\varphi\right).$$

È necessario tener presente che le derivate scritte vanno considerate come le componenti covarianti di un quadrivettore. Infatti, il differenziale di uno scalare

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx^i$$

è pure uno scalare; l'asserzione fatta risulta chiaramente dalla sua forma (prodotto scalare di due quadrivettori).

In generale gli operatori di derivazione rispetto alle coordinate x^i, $\partial/\partial x^i$ vanno considerati come componenti covarianti di un operatore quadrivettoriale. Perciò la divergenza di un quadrivettore $\partial A^i/\partial x^i$, dove si derivano le componenti controvarianti A^i, è uno scalare[1]).

Nello spazio tridimensionale, l'integrazione può esser estesa ad un volume, ad una superficie e ad una curva. Nello spazio quadridimensionale sono possibili i quattro casi d'integrazione.

---

[1]) Se la derivazione è fatta rispetto alle « coordinate covarianti » x_i, le derivate

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ -\nabla\varphi\right)$$

costituiscono le componenti controvarianti di un quadrivettore. Ricorreremo a tale notazione solo in rarissimi casi $\left(\text{ad esempio, per scrivere il quadrato del 4-gradiente } \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.\right)$

Notiamo che le derivate parziali rispetto alle coordinate vengono scritte spesso con i simboli abbreviati

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Gli operatori di derivazione scritti in questa forma mostrano chiaramente il carattere controvariante o covariante delle grandezze che essi contribuiscono a formare. Lo stesso vantaggio si ha utilizzando un'altra notazione abbreviata delle derivate, cioè mediante gli indici preceduti da una virgola:

$$\varphi_{,\,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad \varphi^{,\,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

1) Integrale esteso a una curva dello spazio quadridimensionale. L'elemento d'integrazione è un elemento di lunghezza, cioè il quadrivettore dx^i.

2) Integrale esteso a una superficie (bidimensionale) dello spazio quadridimensionale. È noto che nello spazio tridimensionale le proiezioni dell'area di un parallelogrammo, costruito con due vettori $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}'$, sui piani coordinati $x_\alpha x_\beta$ sono uguali a $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Per analogia, nello spazio quadridimensionale l'elemento infinitesimo di superficie è determinato dal tensore antisimmetrico di rango due $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; le sue componenti sono uguali alle proiezioni dell'area dell'elemento sui piani coordinati. Nello spazio tridimensionale, come è noto, in luogo del tensore $df_{\alpha\beta}$ si prende per elemento di superficie il vettore df_α, duale del tensore $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Da un punto di vista geometrico esso è un vettore normale all'elemento di superficie e avente per lunghezza l'area di questo elemento. Nello spazio quadridimensionale è impossibile costruire un tale vettore, ma si può costruire un tensore df^{*ik}, duale del tensore df^{ik}, cioè

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \tag{6,11}$$

Esso esprime geometricamente un elemento di superficie uguale e « normale » all'elemento df^{ik}; tutti i segmenti di retta di questo elemento sono ortogonali a quelli dell'elemento df^{ik}. È evidente che $df^{ik} df^*_{ik} = 0$.

3) Integrale esteso a una ipersuperficie, cioé a una varietà tridimensionale. In uno spazio tridimensionale, il volume del parallelepipedo costruito su tre vettori è uguale, come è noto, al determinante del terzo ordine formato dalle componenti di questi vettori. In uno spazio quadridimensionale le proiezioni del volume del « parallelepipedo » (cioè l' « area » della ipersuperficie) costruito sui tre quadrivettori dx^i, dx'^i, dx''^i si esprimono analogamente: esse sono definite dai determinanti

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

che formano un tensore del terzo rango, antisimmetrico rispetto ai tre indici. Per elemento di integrazione su una ipersuperficie è più comodo prendere il quadrivettore dS^i, duale del tensore dS^{ikl}

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n, \tag{6,12}$$

dove

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \ \ldots$$

Dal punto di vista geometrico dS^i è un quadrivettore avente per lunghezza l' « area » dell'elemento dell'ipersuperficie e per direzione la normale a questo elemento (cioè perpendicolare a tutte le rette tracciate in questo elemento della ipersuperficie). In particolare, $dS^0 = dx\,dy\,dz$, cioè rappresenta un elemento di volume dV a tre dimensioni, ossia la proiezione della ipersuperficie sull'iperpiano $x^0 =$ costante.

4) Integrale esteso a un volume quadridimensionale; l'elemento d'integrazione è il prodotto di differenziali:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dV. \tag{6,13}$$

Questo elemento è scalare: è evidente che l'elemento di volume dello spazio quadridimensionale non cambia per una rotazione del sistema di coordinate[1]).

Per analogia con i teoremi di Gauss e di Stokes per l'analisi vettoriale tridimensionale, esistono teoremi che permettono di trasformare gli integrali quadridimensionali.

Un integrale esteso a una ipersuperficie chiusa può essere trasformato in integrale esteso al volume quadridimensionale da essa limitato, sostituendo all'elemento d'integrazione dS_i l'operatore

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,14}$$

Per esempio, per l'integrale di un vettore A^i si ha:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \tag{6,15}$$

Questa formula è una generalizzazione del teorema di Gauss.

Un integrale esteso a una superficie ordinaria si trasforma in un integrale esteso alla ipersuperficie da essa « inviluppata », sostituendo all'elemento d'integrazione df^*_{ik} l'operatore

$$df^*_{ik} \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,16}$$

Per esempio, per l'integrale del tensore antisimmetrico A^{ik} si ha:

$$\frac{1}{2} \int A^{ik} df^*_{ik} = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{6,17}$$

---

[1]) Sostituendo le variabili d'integrazione x^0, x^1, x^2, x^3 con le nuove variabili x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, l'elemento d'integrazione $d\Omega$ viene sostituito, come è noto, con $J\,d\Omega'$, dove $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ e

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

è lo jacobiano di trasformazione. Per una trasformazione lineare tipo $x'^i = \alpha^i_k x^k$ lo jacobiano J coincide con il determinante $| \alpha^i_k |$ ed è uguale (per rotazioni del sistema di coordinate) all'unità; in ciò consiste appunto l'invarianza di $d\Omega$.

Un integrale esteso a una curva chiusa quadridimensionale si trasforma in un integrale esteso alla superficie che essa limita facendo la sostituzione

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{6,18}$$

Per esempio, per l'integrale di un vettore si ha:

$$\oint A_i\, dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \tag{6,19}$$

che rappresenta una generalizzazione del teorema di Stokes.

PROBLEMI

1. Stabilire la legge di trasformazione delle componenti del 4-tensore simmetrico A^{ik} nelle trasformazioni di Lorentz (6,1).

Soluzione. Considerando le componenti del 4-tensore come il prodotto di due componenti di un quadrivettore, otteniamo:

$$A^{00} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{00} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right),$$

$$A^{11} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{11} + 2 \frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{00} \right),$$

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02} \right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left[A'^{01} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{V}{c} A'^{00} + \frac{V}{c} A'^{11} \right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12} \right)$$

e formule analoghe per A^{33}, A^{13}, A^{03}.

2. Risolvere lo stesso problema per il tensore antisimmetrico A^{ik}.

Soluzione. Poiché le coordinate x^2, x^3 non cambiano, non cambia nemmeno la componente del tensore A^{23} mentre le componenti A^{12}, A^{13} ed A^{02}, A^{03} si trasformano come x^1 ed x^0:

$$A^{23} = A'^{23}, \qquad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

analogamente per A^{13}, A^{03}.

Rispetto alle rotazioni del sistema di due coordinate nel piano $x^0 x^1$ (tali sono le trasformazioni considerate) le componenti $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$

formano un tensore antisimmetrico di ordine uguale al numero di dimensioni dello spazio. Quindi (vedi nota alla pag. 36) queste componenti non cambiano nelle trasformazioni considerate:

$$A^{01} = A'^{01}.$$

§ 7. *Quadrivelocità*

Partendo da un vettore velocità tridimensionale ordinario si può formare un quadrivettore. Il vettore

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{7,1}$$

costituisce la *quadrivelocità* (4-velocità) di una particella.

Per trovarne le componenti, osserviamo che, secondo la (3,1),

$$ds = c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dove v è la velocità tridimensionale ordinaria della particella. Perciò

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ecc. Quindi,

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{7,2}$$

Notiamo che la quadrivelocità è una grandezza adimensionale.

Le componenti della quadrivelocità non sono indipendenti. Notando che $dx_i dx^i = ds^2$, abbiamo:

$$u^i u_i = 1. \tag{7,3}$$

Dal punto di vista geometrico u^i è il quadrivettore unitario tangente alla linea d'universo della particella.

Analogamente alla definizione della quadrivelocità, si può chiamare la derivata seconda

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

4-accelerazione. Derivando la relazione (7,3), troviamo:

$$u_i w^i = 0, \tag{7,4}$$

cioè i quadrivettori velocità ed accelerazione sono ortogonali.

PROBLEMA

Determinare il moto relativistico uniformemente accelerato, cioè un moto rettilineo nel corso del quale l'accelerazione w resta costante nel proprio sistema di riferimento (in ogni istante).

Soluzione. Nel sistema di riferimento dove la velocità della particella è $v = 0$, le componenti della 4-accelerazione sono uguali a $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (dove w è l'accelerazione tridimensionale ordinaria diretta lungo l'asse delle x). La condizione relativisticamente invariante di accelerazione uniforme dev'essere rappresentata sotto forma di un 4-scalare costante coincidente con w^2 nel proprio sistema di riferimento:

$$w^i w_i = \text{costante} \equiv -\frac{w^2}{c^4}.$$

Nel sistema di riferimento « immobile » rispetto al quale si considera il moto, sviluppando l'espressione $w^i w_i$ si trova l'equazione.

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w \quad \text{oppure} \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{costante}.$$

Ponendo $v = 0$ per $t = 0$, si ha costante $= 0$, cosicché

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}.$$

Integrando ancora una volta e ponendo $x = 0$ per $t = 0$, si ottiene:

$$x = \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right).$$

Per $wt \ll c$ queste formule si trasformano nelle espressioni classiche $v = wt$, $x = wt^2/2$. Per $wt \to \infty$ la velocità tende al valore costante di c.

Il tempo proprio di una particella animata da un moto uniformemente accelerato è dato dall'integrale

$$\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \frac{c}{w}\,\text{Arsh}\,\frac{wt}{c}.$$

Quando $t \to \infty$, esso cresce molto piú lentamente di t secondo la legge $\frac{c}{w}\ \ln\frac{2wt}{c}$.

Capitolo II

MECCANICA RELATIVISTICA

§ 8. *Principio di minima azione*

Per studiare il moto delle particelle materiali partiremo dal principio di minima azione. Secondo questo principio, per ogni sistema meccanico esiste un integrale S, detto azione, che è minimo per il moto effettivo e la cui variazione δS è, di conseguenza, nulla[1]).

Definiamo l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta cioè all'azione di forze esterne.

È opportuno notare che questo integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, cioè esso dev'essere invariante per trasformazioni di Lorentz. È evidente quindi che esso deve essere l'integrale di uno scalare. È chiaro inoltre che sotto il segno d'integrazione ci debbono essere differenziali del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è l'intervallo ds o $\alpha\ ds$, dove α è una costante.

L'azione per una particella libera deve essere quindi della forma

$$S = -\alpha\int_a^b ds,$$

dove l'integrale è esteso alla linea d'universo compresa tra due eventi dati a e b che rappresentano le posizioni iniziale e finale occupate dalla particella in istanti determinati t_1 e t_2, vale a dire tra i punti d'universo dati; α è una costante che caratterizza la particella data. È facile constatare che α deve essere una grandezza positiva per tutte le particelle. Infatti, nel § 3 abbiamo visto che l'integrale $\int_a^b ds$ ha un valore massimo quando è esteso ad una retta d'universo; esso può essere reso arbitrariamente piccolo, integrando lungo una curva d'universo.

[1]) A rigore, il principio di minima azione asserisce che l'integrale S deve essere minimo solo su piccoli archi della linea d'integrazione. Per linee di lunghezza arbitraria, si può affermare solo che l'integrale S ha un estremo che non è necessariamente un minimo (vedi vol. I, *Meccanica*, § 2).

In tal modo, l'integrale preceduto dal segno positivo non può avere un minimo; l'integrale preceduto dal segno opposto ha un minimo lungo la retta d'universo.

L'azione si può rappresentare sotto forma di un integrale nel tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt.$$

Il coefficiente di dt L è, come è noto, la *funzione di Lagrange* o *la lagrangiana* del sistema meccanico dato. Con l'aiuto della (3,1) troviamo

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt,$$

dove v è la velocità della particella materiale. La lagrangiana per la particella è quindi

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Come abbiamo già notato, la grandezza α caratterizza la particella data. Ogni praticella è caratterizzata in meccanica classica dalla sua massa m. Stabiliamo la relazione tra le grandezze α ed m, che può essere trovata imponendo che nel passaggio al limite per $c \to \infty$ la nostra espressione di L si trasformi nell'espressione classica

$$L = mv^2/2.$$

Per realizzare questo passaggio, sviluppiamo L in serie di potenze di v/c. Trascurando i termini di ordine superiore, si ottiene:

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

I termini costanti della lagrangiana non incidono sulle equazioni del moto e si possono quindi omettere. Omettendo la costante αc in L e confrontando con l'espressione classica $L = mv^2/2$, troviamo che $\alpha = mc$.

L'azione per una particella materiale libera è quindi

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{8,1}$$

e la lagrangiana

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{8,2}$$

§ 9. *Energia ed impulso*

L'*impulso* di una particella è, come è noto, il vettore $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ esprime simbolicamente un vettore le cui componenti sono le derivate di L rispetto alle componenti corrispondenti di $\mathbf{v}$). La formula (8,2) ci permette di trovare

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,1}$$

Per velocità piccole ($v \ll c$) o nel limite per $c \to \infty$, questa espressione si trasforma in quella classica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Per $v = c$, l'impulso diventa infinito.

La derivata dell'impulso rispetto al tempo è la forza agente sulla particella. Supponiamo ora che varii soltanto la direzione della velocità, cioè che la forza sia perpendicolare alla velocità. Allora

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,2}$$

Se invece varia soltanto il modulo della velocità, cioè la forza e la velocità sono collineari, si ha allora

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,3}$$

Vediamo che nei due casi la relazione tra forza e accelerazione è differente.

Si chiama *energia* $\mathscr{E}$ della particella la grandezza

$$\mathscr{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$$

(vedi vol. I, *Meccanica*, § 6). Sostituendo le espressioni (8,2) e (9,1), rispettivamente, con L e $\mathbf{p}$, otteniamo:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,4}$$

Questa formula di grande importanza indica, in particolare, che in meccanica relativistica l'energia di una particella libera non si annulla per $v = 0$, ma prende il valore finito

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{9,5}$$

Questa è l'*energia di riposo* della particella.

Per velocità piccole ($v \ll c$), sviluppando in serie di potenze di v/c, si ha:

$$\mathscr{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

che rappresenta, se si sottrae l'energia di riposo, l'espressione classica dell'energia cinetica di una particella.

Sottolineiamo, che pur parlando qui di una « particella», non utilizziamo mai il suo carattere « elementare ». Di conseguenza, le formule ottenute sono ugualmente applicabili ad ogni corpo complesso, costituito da un gran numero di particelle; m rappresenterà allora la massa totale e v la velocità del corpo in blocco. In particolare, la formula (9,5) è valida anche per ogni corpo che in blocco è in quiete. Notiamo che l'energia di un corpo libero (cioè l'energia di qualsiasi sistema isolato), in meccanica relativistica, è una grandezza del tutto determinata, sempre positiva, direttamente legata alla massa del corpo. Ricordiamo a questo proposito che l'energia di un corpo è determinata, in meccanica classica, con un'approssimazione a meno di una costante additiva e può essere sia positiva che negativa.

L'energia di un corpo in quiete comprende, oltre all'energia di riposo delle particelle che lo compongono, l'energia cinetica delle particelle e la loro energia di interazione. In altri termini, mc^2 non è uguale alla somma $\sum m_a c^2$ (m_a sono le masse delle particelle) e, di conseguenza, nemmeno m è uguale a $\sum m_a$. Quindi nella meccanica relativistica la legge di conservazione della massa non sussiste: la massa di un corpo composto non è uguale alla somma delle masse delle sue componenti. Resta valida soltanto la legge di conservazione dell'energia, che comprende anche l'energia di riposo della particella.

Elevando al quadrato le espressioni (9,1) e (9,4) e confrontandole, troviamo la seguente relazione tra l'energia e l'impulso di una particella:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{9,6}$$

L'energia espressa in funzione dell'impulso è detta, come si sa, *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana*:

$$\mathscr{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{9,7}$$

Per velocità piccole, $p \ll mc$, si ha approssimativamente

$$\mathscr{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

cioè, sottraendo l'energia di riposo, si ottiene la nota espressione classica della funzione di Hamilton.

Dalle espressioni (9,1) e (9,4) deriva anche la seguente relazione tra l'energia, l'impulso e la velocità di una particella libera:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{9,8}$$

Per $v = c$, l'impulso e l'energia della particella diventano infiniti. Questo significa che una particella di massa m non nulla non può muoversi alla velocità della luce. In meccanica relativistica possono tuttavia esistere particelle con massa nulla, che si muovono alla velocità della luce[1]. La formula (9,8) per tali particelle assume la forma:

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{9,9}$$

Questa formula è valida anche per particelle di massa non nulla nel caso, detto *ultrarelativistico*, in cui l'energia della particella $\mathscr{E}$ è grande rispetto alla sua energia di riposo mc^2.

Scriviamo ora tutte le relazioni ottenute in notazioni quadridimensionali. Secondo il principio di minima azione,

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b ds = 0.$$

Al fine di esplicitare l'espressione di δS, osserviamo che $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ e, di conseguenza,

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i \, d\delta x^i.$$

Integrando per parti, troviamo:

$$\delta S = -mcu_i\delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \tag{9,10}$$

Come è noto, per stabilire le equazioni del moto si confrontano diverse traiettorie passanti per due punti dati, cioè ai limiti $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. La traiettoria effettiva si deduce dalla condizione $\delta S = 0$. La formula (9,10) ci dà allora l'equazione $du_i/ds = 0$, che esprime la costanza della velocità di una particella libera nello spazio quadridimensionale.

Per trovare la variazione dell'azione come funzione delle coordinate, bisogna fissare solo il punto a, porre cioè $(\delta x^i)_a = 0$. Il secondo punto invece va supposto variabile, tenendo però presente che si devono considerare soltanto le traiettorie reali, cioè che soddisfano le equazioni del moto. L'integrale nell'espressione (9,10) per δS è

[1] Per esempio i quanti luminosi, ossia i fotoni, e anche il neutrino.

quindi nullo. In luogo di $(\delta x^i)_b$ scriviamo semplicemente δx^i e troviamo:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \tag{9,11}$$

Il quadrivettore

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{9,12}$$

è detto *4-impulso*. Come è noto dalla meccanica, le derivate $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ sono le tre componenti del vettore impulso $\mathbf{p}$ della particella, e la derivata $\partial S/\partial t$ è l'energia $\mathscr{E}$ della particella. Per questo le componenti covarianti del 4-impulso sono $p_i = (\mathscr{E}/c, -\mathbf{p})$ e le componenti controvarianti[1])

$$p^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{9,13}$$

Dalla (9,11) risulta che le componenti del 4-impulso di una particella libera sono

$$p^i = mcu^i. \tag{9,14}$$

Sostituendo le componenti della 4-velocità con le corrispondenti espressioni (7,2) si vede facilmente che si ottengono per $\mathbf{p}$ ed $\mathscr{E}$ le formule (9,1) e (9,4).

In meccanica relativistica l'impulso e l'energia sono quindi le componenti di uno stesso quadrivettore. Ne derivano immediatamente le formule di trasformazione dell'impulso e dell'energia nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Riportando nelle formule generali di trasformazione di un quadrivettore (6,1) le espressioni (9,13), troviamo:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{9,15}$$

dove p_x, p_y, p_z sono le componenti del vettore tridimensionale $\mathbf{p}$.

Dalla definizione del 4-impulso (9,14) e dall'identità $u^i u_i = 1$ otteniamo per il quadrato del 4-impulso di una particella libera:

$$p^i p_i = m^2c^2. \tag{9,16}$$

Sostituendovi le espressioni (9,13), ritorniamo alla relazione (9,6).

Per analogia con la definizione ordinaria di forza, il quadrivettore forza si può definire come la derivata

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \tag{9,17}$$

[1]) Citiamo la regola mnemonica che permette di ricordare la definizione dei quadrivettori fisici: le componenti controvarianti sono collegate ai vettori tridimensionali ($\mathbf{r}$ per x^i, $\mathbf{p}$ per p^i, ecc.) preceduti dal «giusto» segno positivo.

Le sue componenti soddisfano l'identità $g_i u^i = 0$. Le componenti di questo quadrivettore si esprimono mediante il vettore forza tridimensionale ordinario $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ secondo l'espressione

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{9,18}$$

La componente temporale risulta legata al lavoro della forza.

L'equazione relativistica di Hamilton-Jacobi si ottiene sostituendo p_i nella (9,16) con le derivate $-\partial S/\partial x^i$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2, \tag{9,19}$$

oppure, scrivendo la somma in forma esplicita:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2. \tag{9,20}$$

Il passaggio limite alla meccanica classica nell'equazione (9,20) si può eseguire nel modo seguente. Bisogna innanzitutto tener presente, come per il passaggio corrispondente nella (9,7), che in meccanica relativistica l'energia di una particella contiene il termine mc^2, assente in meccanica classica. Siccome l'azione S è legata all'energia dall'espressione $\mathscr{E} = -\partial S/\partial t$, nel passaggio alla meccanica classica bisogna introdurre in luogo di S una nuova azione S' che soddisfi la relazione

$$S = S' - mc^2t.$$

Sostituendo nella (9,20), troviamo:

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0.$$

Quando $c \to \infty$, questa equazione si trasforma nella nota equazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica.

§ 10. *Trasformazione della funzione di distribuzione*

Nello studio di diversi problemi di fisica si ha a che fare con un fascio di particelle aventi differenti impulsi. La struttura di questo fascio, il suo spettro in impulso, è caratterizzato dalla *funzione di distribuzione* delle particelle in impulso: $f(\mathbf{p})\, dp_x dp_y dp_z$ è il numero di particelle aventi impulsi con componenti compresi negli intervalli dp_x, dp_y, dp_z (o, come si dice più brevemente, il numero di particelle nell'elemento di volume $d^3p \equiv dp_x dp_y dp_z$ dello « spazio degli impulsi »). Sorge allora il problema di determinare la legge di trasformazione della funzione di distribuzione $f(\mathbf{p})$ nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro.