Prova in itinere di Fisica Generale II del 12 novembre 2015

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Si consideri la distribuzione di carica a simmetria sferica descritta dalla densità di carica

$$\rho(r) = \frac{5K}{\pi a^5} r(a-r), \qquad \text{per } r \leq a,$$

e $\rho(r) = 0$, per $r > a$, dove $a > 0$ e K sono parametri dimensionali, e r è la coordinata radiale in un sistema di coordinate sferiche con l'origine O nel centro della distribuzione. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

Si chiede di determinare:

1. La carica totale Q_{tot} associata alla distribuzione assegnata.

2. Il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata.

3. Il valore massimo dell'intensità del campo elettrico determinato al punto precedente e il luogo dei punti dello spazio in cui tale massimo è raggiunto.

4. Il potenziale elettrostatico $V(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata, assumendo che esso si annulli all'infinito.

5. L'energia elettrostatica $\mathcal{U}$ della distribuzione assegnata.

Soluzione della prova in itinere di Fisica Generale II del 12 novembre 2015

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

1. La carica totale richiesta è

$$Q_{tot} = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 \, \mathrm{d}r = \frac{20K}{a^5} \int_0^a r^3(a-r) \, \mathrm{d}r = 20K \int_0^1 x^3(1-x) \, \mathrm{d}x = K,$$

dove nell'ultimo integrale si è introdotta la variabile adimensionale $x = r/a$.

2. Il campo elettrostatico richiesto ha solo componente radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$; applicando il teorema di Gauss ad una sfera di centro O e raggio r si trova

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

dove $Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 \, \mathrm{d}s$ è la carica contenuta nella sfera. Per $r \leq a$ si ha

$$Q(r) = \frac{20K}{a^5} \int_0^r s^3(a-s) \, \mathrm{d}s = \frac{K}{a^5} r^4 (5a - 4r),$$

mentre per $r > a$, $Q(r) = K$ è indipendente da r. Quindi

$$E_r(r) = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 a^5} r^2 (5a - 4r), \quad \text{per } r \leq a, \quad \text{e} \quad E_r(r) = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{per } r > a.$$

3. La quantità adimensionale

$$\frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{K} E_r(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 \left(5 - 4\dfrac{r}{a}\right), & \text{per } r \leq a, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right)^2, & \text{per } r > a, \end{cases}$$

è positiva e dipende dalla variabile adimensionale $x = r/a$. Il massimo richiesto si trova determinando il massimo della funzione continua e derivabile

$$\gamma(x) = \begin{cases} x^2(5 - 4x), & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

La derivata di $\gamma(x)$ si annulla al finito per $x = 0$ e $x = \frac{5}{6}$. Al primo punto corrisponde il minimo dell'intensità del campo elettrico, mentre il massimo richiesto si trova sulla sfera di raggio $r = \frac{5}{6}a$ e vale

$$\frac{|K|}{4\pi\epsilon_0 a^2} \gamma\left(x = \frac{5}{6}\right) = \frac{|K|}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{125}{108}.$$

4. Il potenziale elettrostatico cercato è $V(r) = \int_r^\infty E_r(s) \, \mathrm{d}s$. Per $r > a$

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{K}{4\pi\epsilon_0 s^2} \, \mathrm{d}s = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 r}$$

è il potenziale di un monopolo di carica K. Per $r \leq a$

$$V(r) = \int_r^a \frac{K}{4\pi\epsilon_0 a^5} s^2 (5a - 4s) \, \mathrm{d}s + V(a) = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{5}{3} + \left(\frac{r}{a}\right)^4 - \frac{5}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \right],$$

dove $V(a) = \lim_{r \to a^+} V(r) = \dfrac{K}{4\pi\epsilon_0 a}$.

5. L'energia elettrostatica richiesta è

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho(r)V(r)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{5K^2}{2\pi\epsilon_0 a^6}\int_0^a r^3(a-r)\left(\frac{5}{3}+\frac{r^4}{a^4}-\frac{5r^3}{3a^3}\right)\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{5K^2}{2\pi\epsilon_0 a}\int_0^1 x^3(1-x)\left(\frac{5}{3}+x^4-\frac{5}{3}x^3\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{K^2}{\pi\epsilon_0 a}\right)\frac{85}{504},$$

dove nell'ultimo integrale si è introdotta la variabile adimensionale $x = r/a$. In alternativa,

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty [E_r(r)]^2\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{K^2}{8\pi\epsilon_0 a}\left[\int_0^1 x^6(5-4x)^2\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right] = \left(\frac{K^2}{\pi\epsilon_0 a}\right)\frac{85}{504}.$$