

S. CAPRARA - ESERCIZI DI FISICA GENERALE II - FOGLIO No 3

I. CIRCUITI OHMICI. CIRCUITI RC SERIE. CAMPO MAGNETICO.

ES. 1 Si risolva il circuito ohmico mostrato in Figura 1(a), determinando il valore della corrente che scorre in ciascuna resistenza, in funzione dei valori delle resistenze e delle forze elettromotrici.

ES. 2 Si risolva il circuito ohmico mostrato in Figura 1(b), determinando il valore della corrente che scorre in ciascuna resistenza, in funzione dei valori delle resistenze e delle forze elettromotrici.

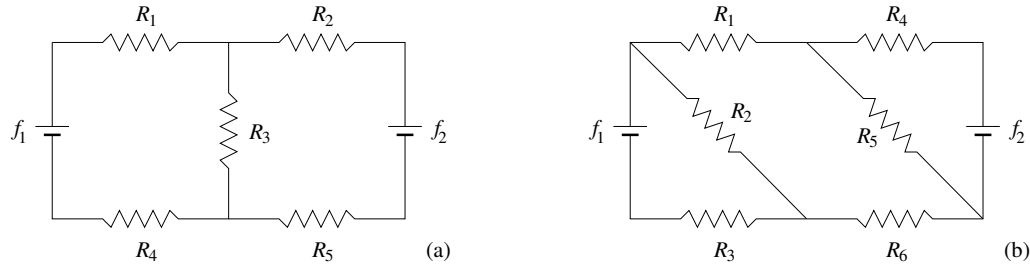


Figura 1.

ES. 3 Si dimostri che la potenza dissipata per effetto Joule nella serie di due resistenze R_1 e R_2 è uguale alla potenza dissipata nella resistenza equivalente $R = R_1 + R_2$.

ES. 4 Si dimostri che la potenza dissipata per effetto Joule nel parallelo di due resistenze R_1 e R_2 è uguale alla potenza dissipata nella resistenza equivalente $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

ES. 5 □ Due sfere conduttrici, di raggio rispettivamente R_1 e R_2 , poste a distanza molto grande (di modo da poter trascurare la mutua induzione elettrostatica), hanno inizialmente carica Q_1 e Q_2 . Ad un certo istante $t = 0$, le due sfere vengono collegate tramite un filo conduttore di resistenza R . Si determini, in funzione del tempo t , la corrente i che scorre nel filo, scegliendo come verso di riferimento per la corrente quello che va dalla sfera di raggio R_1 alla sfera di raggio R_2 . Si determinino le cariche \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 presenti sulle due sfere nello stato stazionario asintotico (per $t \rightarrow +\infty$).

ES. 6 Si consideri un circuito RC serie in cui è presente un generatore ideale di f.e.m. f . All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e nel circuito comincia a circolare corrente. Il condensatore è inizialmente scarico. Si determinino in funzione del tempo t la d.d.p. V_R ai capi della resistenza R e la d.d.p. V_C ai capi della capacità C .

ES. 7 □ Si consideri un circuito RC serie in cui è presente un generatore ideale di f.e.m. f . All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e nel circuito comincia a circolare corrente. Il condensatore è inizialmente scarico. Si determini l'energia dissipata nella resistenza R per effetto Joule durante tutto il processo di carica del condensatore. Si calcoli l'efficienza η del processo di carica del condensatore, definita come rapporto tra l'energia immagazzinata nel condensatore e l'energia complessivamente erogata dal generatore.

ES. 8 Si consideri un circuito RC serie in cui sul condensatore di capacità C è inizialmente presente la carica Q_0 . All'istante $t = 0$ il condensatore viene chiuso sulla resistenza. Si calcoli l'energia dissipata nella resistenza R per effetto Joule durante tutto il processo di scarica del condensatore.

ES. 9 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti a simmetria cilindrica, sapendo che la densità di corrente \mathbf{J} è costante in ogni punto di un cilindro indefinito di raggio R , e parallela all'asse del cilindro, ed è nulla all'esterno del cilindro.

ES. 10 □ Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 , sapendo che la densità di corrente \mathbf{J} è costante in ogni punto del guscio cilindrico e parallela al suo asse, ed è nulla all'esterno del guscio cilindrico.

ES. 11 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R , sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}_0 r / R$, per $r \leq R$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $r > R$, è parallela all'asse del cilindro e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse (\mathbf{J}_0 è un vettore costante parallelo all'asse del cilindro).

ES. 12 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R , sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}_0 r (R - r) / R^2$, per $r \leq R$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $r > R$, è parallela all'asse del cilindro e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse (\mathbf{J}_0 è un vettore costante parallelo all'asse del cilindro).

ES. 13 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 , percorso da corrente, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 r/R_1$, per $R_1 \leq r \leq R_2$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $0 \leq r < R_1$ e $r > R_2$, è parallela all'asse del guscio cilindrico e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse (\mathbf{J}_0 è un vettore costante parallelo all'asse del guscio cilindrico).

ES. 14 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica \mathbf{B} generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 , sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0(R_2 - r)(r - R_1)/(R_1 R_2)$, per $R_1 \leq r \leq R_2$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $0 \leq r < R_1$ e $r > R_2$, è parallela all'asse del guscio cilindrico e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse (\mathbf{J}_0 è un vettore costante parallelo all'asse del guscio cilindrico).

ES. 15 Si consideri una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R in cui è presente una cavità cilindrica con asse parallelo all'asse del primo cilindro e raggio $a < R/2$. La distanza tra l'asse del cilindro e l'asse della cavità è $d = R/2$. All'interno del cilindro la densità di corrente \mathbf{J} è costante in ogni punto e parallela all'asse del cilindro. Nella cavità e nello spazio esterno al cilindro la densità corrente è nulla. Si determini il campo di induzione magnetica \mathbf{B} in un punto qualunque sull'asse della cavità. Si determini il campo di induzione magnetica \mathbf{B} in un punto qualunque sull'asse del cilindro.

ES. 16* Si dimostri che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, partendo dalla relazione che lega il campo di induzione magnetica \mathbf{B} alla densità di corrente \mathbf{J} ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V},$$

dove \mathcal{V} è il volume occupato dai conduttori, il vettore $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ individua la posizione del punto nel quale si calcola il campo, $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}} + z'\hat{\mathbf{k}}$ è il vettore che individua il punto variabile nel volume \mathcal{V} , e $d\mathcal{V} = dx'dy'dz'$. Per la dimostrazione, si utilizzino le seguenti due proprietà della densità di corrente \mathbf{J} :

(i) $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$ (equazione di continuità in regime stazionario);

(ii) $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie dei conduttori (la corrente non attraversa la superficie dei conduttori).

ES. 17* Si consideri il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V},$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente, \mathcal{V} è il volume occupato dai conduttori, il vettore $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ individua la posizione del punto nel quale si calcola il potenziale vettore \mathbf{A} , $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}} + z'\hat{\mathbf{k}}$ è il vettore che individua il punto variabile nel volume \mathcal{V} , e $d\mathcal{V} = dx'dy'dz'$. Si dimostri che $\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

ES. 18* Si dimostri che il potenziale vettore \mathbf{A} definito nell'esercizio precedente è tale che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Per la dimostrazione, si usino le stesse proprietà della densità di corrente \mathbf{J} indicate nella traccia dell'ES. 16.

ES. 19 Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By\hat{\mathbf{i}} + Bx\hat{\mathbf{j}}$, dove B è una costante e $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Si determini il campo di induzione magnetica \mathbf{B} associato al potenziale vettore considerato.

ES. 20 Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (Cx - By)\hat{\mathbf{i}} + (Cy + Bx)\hat{\mathbf{j}} + Cz\hat{\mathbf{k}}$, dove B e C sono costanti e $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} \neq 0$. Si determini il campo di induzione magnetica \mathbf{B} associato al potenziale vettore considerato. Si dimostri che il potenziale vettore considerato differisce dal potenziale vettore dell'ES. 19 per il gradiente di una funzione $f(x, y, z)$. Si determini, a meno di una costante arbitraria, tale funzione. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 f$.

ES. 21* Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(x, y, z) = A(r)\hat{\mathbf{k}}$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la coordinata radiale cilindrica, $A(r)$ è una funzione scalare derivabile rispetto al suo argomento, e $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore dell'asse z . Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Si determini il campo di induzione magnetica \mathbf{B} associato al potenziale vettore considerato. [Si osservi che in coordinate cilindriche $r\hat{\boldsymbol{\theta}} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$, dove $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ è il versore associato alla coordinata cilindrica angolare ϑ].

ES. 22* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore \mathbf{A} generato da un filo rettilineo infinito percorso dalla corrente i , con la condizione che \mathbf{A} si annulli a distanza d dal filo. (Si assuma che la corrente scorre nel verso positivo dell'asse z).

ES. 23* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore \mathbf{A} generato dalla distribuzione di corrente considerata nell'ES. 9, con la condizione che \mathbf{A} si annulli sulla superficie del cilindro, per $r = R$. (Si assuma come asse z l'asse del cilindro).

ES. 24* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore \mathbf{A} generato dalla distribuzione di corrente considerata nell'ES. 10, con la condizione che \mathbf{A} si annulli sulla superficie esterna del guscio cilindrico, per $r = R_2$. (Si assuma come asse z l'asse del guscio cilindrico).