S. CAPRARA - ESERCIZI DI FISICA GENERALE II - FOGLIO No 1

I. CAMPO ELETTROSTATICO. POTENZIALE ELETTROSTATICO.

ES. 1 Sul piano x, y sono poste tre cariche: $Q_1 = 2Q$, nel punto $P_1 = (0, 0)$; $Q_2 = Q$, nel punto $P_2 = (0, \ell)$; $Q_3 = Q$, nel punto $P_3 = (\ell, 0)$. Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalle tre cariche nel punto $P = (\ell, \ell)$.
ES. 2 Sul piano x, y sono poste tre cariche: $Q_1 = Q$, nel punto $A = (-a, 0)$; $Q_2 = Q$, nel punto $B = (a, 0)$; $Q_3 = 2Q$, nel punto $C = (0, a\sqrt{3})$. Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalle tre cariche nel baricentro del triangolo ABC. [Suggerimento: osservare che il triangolo è equilatero e che $Q_3 = Q + Q$. Simmetria e principio di sovrapposizione possono semplificare il calcolo].
ES. 3 Agli estremi di un segmento $\overline{AB}$ di lunghezza ℓ sono poste due cariche Q_1 e Q_2, dello stesso segno. Determinare il punto $P \in \overline{AB}$ nel quale il campo elettrico $\vec{E}$ generato da Q_1 e Q_2 è nullo.
ES. 4 Sul piano x, y sono poste tre cariche: Q_1, nel punto $P_1 = (0, 0)$; $Q_2 = Q$, nel punto $P_2 = (0, \ell)$; $Q_3 = Q$, nel punto $P_3 = (\ell, 0)$. Determinare il valore di Q_1 per il quale il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalle tre cariche si annulla nel punto $P_4 = (\ell, \ell)$.
ES. 5* Due cariche, $Q_1 = Q > 0$ e $Q_2 = -Q < 0$ sono poste agli estremi di un segmento di lunghezza ℓ. Questa configurazione di cariche è detta *dipolo elettrico*. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, in modo che le cariche Q_1 e Q_2 si trovino, rispettivamente nei punti $(0, 0, \frac{1}{2}\ell)$ e $(0, 0, -\frac{1}{2}\ell)$ dell'asse z, si determinino il potenziale elettrostatico V e il campo elettrico $\vec{E}$ generati dalle due cariche nel punto $P = (x, y, z)$. Si determini l'espressione asintotica del potenziale V quando $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg \ell$. [Suggerimento, si parametrizzi la posizione del punto P con le coordinate R e $\vartheta \equiv \arccos(z/R)$].
ES. 6 Il potenziale elettrostatico generato da una carica, distribuita con densità $\rho(x', y', z')$ dentro un dominio $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$, nel punto $P = (x, y, z)$ è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx'\, dy'\, dz'.$$

Utilizzando la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, determinare il campo elettrico nel punto P.
ES. 7 Dimostrare che, se il potenziale elettrostatico V dipende solo dalla coordinata sferica $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, allora il campo elettrico ha solo componente radiale $E_r = -\frac{dV}{dr}$. Dimostrare, analogamente, che ciò vero anche nel caso in cui V dipenda solo dalla coordinata cilindrica $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$.
ES. 8** Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente su una retta, con densità lineare λ, in un punto P la cui distanza dalla retta è R. Quale problema si incontrerebbe volendo determinare il potenziale elettrostatico V? Perché?
ES. 9* Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente su un piano, con densità superficiale σ, in un punto P la cui distanza dal piano è R. Quale problema si incontrerebbe volendo determinare il potenziale elettrostatico V? Perché?
ES. 10** Determinare il potenziale elettrostatico V generato da una carica distribuita uniformemente dentro una sfera di raggio R_0, con densità ρ, in un punto P la cui distanza dal centro della sfera è R. Si discutano separatamente i casi $R < R_0$ e $R > R_0$. Come si comporta il potenziale per $R = R_0$?
ES. 11 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ nella situazione descritta nell'esercizio precedente. Studiare la continuità del campo per $R = R_0$.
ES. 12** Una carica è distribuita uniformemente, con densità lineare λ, sul segmento di estremi $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$ dell'asse x. Determinare il potenziale elettrostatico V generato da questa distribuzione di carica nel generico punto $\bar{P} = (x, y)$ del piano x, y. Il risultato ottenuto, permette di conoscere il potenziale in ogni punto $P = (x, y, z)$ dello spazio tridimensionale?
ES. 13 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ nella situazione descritta nell'esercizio precedente, nel punto $P = (x, y, z)$.
ES. 14* Determinare il potenziale elettrostatico V generato da una carica distribuita uniformemente, con densità lineare λ, su un anello circolare di raggio R_0, in un generico punto della retta perpendicolare al piano su cui giace l'anello e passante per il centro dell'anello.
ES. 15* Una carica è distribuita uniformemente, con densità superficiale σ, sul cerchio di raggio R_0 appartenente al piano x, y. L'origine del sistema di riferimento è fissata nel centro del cerchio. Determinare il potenziale elettrostatico V generato da questa distribuzione di carica nel generico punto $P = (0, 0, z)$ dell'asse z. Determinare l'espressione asintotica di V per $z \gg R_0$.
ES. 16 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ nel punto $P = (0, 0, z)$, nella situazione descritta nell'esercizio precedente.

II. APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS.

ES. 17 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente su una retta con densità lineare λ.
ES. 18 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente su un piano con densità superficiale σ.
ES. 19 Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due piani paralleli, caricati con cariche di segno opposto e uguale densità superficiale, posti a distanza d l'uno dall'altro. Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ nella regione di spazio compresa tra i due piani e nella regione esterna.
ES. 20 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente sulla superficie di un cilindro indefinito di raggio R_0 con densità superficiale σ. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.
ES. 21 Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due superfici cilindriche coassiali indefinite, di raggi R_1 e R_2 (con $R_1 < R_2$), caricate uniformemente con cariche di segno opposto. Determinare la relazione che deve intercorrere tra le due densità superficiali di carica, rispettivamente σ_1 e σ_2, affinché il campo elettrico sia diverso da zero soltanto nella regione di spazio compresa tra le due superfici cilindriche. Si determini quindi il campo elettrico $\vec{E}$ in questa regione.
ES. 22 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato dal sistema formato dalla superficie di un cilindro indefinito di raggio R_0, uniformemente caricata con densità superficiale di carica σ, e dall'asse del cilindro, uniformemente carico con densità lineare di carica λ. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.
ES. 23 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio R_0 con densità superficiale σ. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.
ES. 24 Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due superfici sferiche concentriche, di raggi R_1 e R_2 (con $R_1 < R_2$), caricate uniformemente con cariche di segno opposto. Determinare la relazione che deve intercorrere tra le due densità superficiali di carica, rispettivamente σ_1 e σ_2, affinché il campo elettrico sia diverso da zero soltanto nella regione di spazio compresa tra le due superfici sferiche. Si determini quindi il campo elettrico $\vec{E}$ in questa regione.
ES. 25* Si considerino i risultati degli esercizi 21 e 24 nel caso limite $d \ll R_1, R_2$, con $d \equiv R_2 - R_1$ e li si confrontino con il risultato dell'esercizio 19. Si dia una giustificazione dei risultati ottenuti.
ES. 26 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato dal sistema formato dalla superficie di una sfera di raggio R_0, uniformemente caricata con densità superficiale di carica σ, e da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.
ES. 27 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente dentro uno strato piano di spessore δ, con densità ρ. Si discutano separatamente i casi del campo elettrico all'interno e all'esterno dello strato piano.
ES. 28 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente dentro un cilindro indefinito di raggio R_0, con densità ρ. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.
ES. 29 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente dentro una sfera di raggio R_0, con densità ρ. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.
ES. 30 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, con densità ρ. Detta R la distanza del punto in cui si calcola il campo dall'asse del guscio cilindrico, si discutano separatamente i tre casi $R < R_1$, $R_1 < R < R_2$ e $R > R_2$. Si studi la continuità del campo elettrico per $R = R_1$ e $R = R_2$.
ES. 31 Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica distribuita uniformemente dentro un guscio sferico di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, con densità ρ. Detta R la distanza del punto in cui si calcola il campo dal centro del guscio sferico, si discutano separatamente i tre casi $R < R_1$, $R_1 < R < R_2$ e $R > R_2$. Si studi la continuità del campo elettrico per $R = R_1$ e $R = R_2$.
ES. 32 Una distribuzione di carica a simmetria cilindrica è caratterizzata dalla densità $\rho(r) = A/r$, per $r \leq R_0$ e $\rho(r) = 0$, per $r > R_0$, con A parametro dimensionale. Si determinino il campo elettrico $\vec{E}$ e il potenziale elettrostatico V generati da questa distribuzione. [N.B.: in coordinate cilindriche $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. L'elemento di volume è $d\mathcal{V} = r\,dr\,d\vartheta\,dz$].
ES. 33 Una distribuzione di carica a simmetria sferica è caratterizzata dalla densità $\rho(r) = A(R_0 - r)$, per $r \leq R_0$ e $\rho(r) = 0$, per $r > R_0$, con A parametro dimensionale. Si determinino il campo elettrico $\vec{E}$ e il potenziale elettrostatico V generati da questa distribuzione. [N.B.: l'elemento di volume è $d\mathcal{V} = r^2\,dr\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$].