UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

CORSO BIS DI ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA

Prova di esonero del 1 giugno 2016

ESERCIZIO 1. Una particella quantistica è confinata in una regione dello spazio essenzialmente bidimensionale, identificabile con una superficie toroidale.
Ignorando alcuni effetti tridimensionali, identifichiamo tale superficie con il toro piatto $\mathbb{T}^2 := \mathbb{T}^1_L \times \mathbb{T}^1_M$, dove $L, M > 0$ e $\mathbb{T}^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.
Il sistema è preparato in uno stato descritto da $\psi_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e la dinamica del sistema è descritta, per dati iniziali sufficientemente regolari, da

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(t,\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2,\ t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_0 \in C^r(\mathbb{T}^2), r \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

(i) Si determini un *Ansatz* per la soluzione $\psi(t,\mathbf{x})$ esprimendola come serie rispetto ad un opportuno sistema ortonormale completo.

(ii) Si mostri che tale *Ansatz* definisce una funzione $\psi(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{T}^2)$ per ogni dato $\psi_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$.

(iii) Si determini un valore del parametro $r \in \mathbb{N}$ sufficiente a garantire che tale *Ansatz* fornisca una soluzione classica dell'equazione (1) (in particolare, si deve garantire che $\mathbf{x} \mapsto \psi(t,\mathbf{x})$ è in $C^2(\mathbb{T}^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$).

(iv) Limitatamente a questo punto, si ponga $L = M$. Mostrare che la dinamica è periodica e determinarne il periodo.

(v) **Facoltativo:** Sia ora $L \neq M$. Limitatamente a questo punto, si assuma che la soluzione contenga solo un numero finito di componenti di Fourier. Si dimostri che esistono soluzioni periodiche per un insieme denso di valori del parametro adimensionato $\alpha = (L/M)^2 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Si indichi con $B_R(0)$ il disco in $\mathbb{R}^2$ di raggio R e centro l'origine.
Si risolva esplicitamente l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in B_R(0) \\ \Delta u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial B_R(0), \end{cases} \tag{2}$$

nei seguenti casi:

- $g = R^2\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)$;
- $g = \sin(6\theta)$, dove abbiamo espresso g in coordinate polari, ossia ponendo $x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta)$.

Nel primo caso si dia l'espressione esplicita di u in coordinate cartesiane.