Nome e cognome ....

Matricola ....

ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
27 gennaio 2017

1. Costrire un omomorfismo suriettivo dal gruppo diedrale D_4 al gruppo ciclico $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, disegnando delle frecce:

id	
r	$(\bar{0}, \bar{0})$
r^2	$(\bar{1}, \bar{0})$
r^3	$(\bar{0}, \bar{1})$
s	$(\bar{1}, \bar{1})$
rs	
r^2s	
r^3s	

Soluzione. Un omomorfismo suriettivo è per esempio quello che manda id e r^2 in $(\bar{0}, \bar{0})$, r e r^3 in $(\bar{1}, \bar{0})$, s e r^2s in $(\bar{0}, \bar{1})$, rs e r^3s in $(\bar{1}, \bar{1})$.

2. Consideriamo nel gruppo alterno A_4 il ciclo $\sigma = (1, 2, 3)$.

L'ordine di σ è ...

La classe di coniugio di σ è formata dai seguenti elementi:

$\{(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 2), (2, 4, 3)\}$
Il centralizzante di σ è formato dai seguenti elementi:

$\{id, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$

3. Sia K il campo di spezzamento di $f(x) = x^6 - 1$ su $\mathbb{Q}$, allora

a) La fattorizzazione in fattori irriducibili di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ è:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

b) $[K:\mathbb{Q}] =$ ......2......

c) La fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ in $K[x]$ è:

$$(x+1)(x-1)(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

d) Il gruppo di Galois di $f(x)$ è ....C_2....................

e) Il numero dei campi intermedi L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K$ è:

..2...

4. Trovare il polinomio minimo di $(2+\sqrt{2})i$:

su $\mathbb{C}$: $x-(2+\sqrt{2})i$ su $\mathbb{R}$: $x^2+6+4\sqrt{2}$

su $\mathbb{Q}$: x^4+12x^2+4 su $\mathbb{Q}(i)$: $x^2-4ix-2$

su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $x^2+6+4\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$: $x^2-2\sqrt{2}ix+2$

5. Trovare per quale valore del parametro α

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^4+\alpha x^2+x+1)$$

è un campo: $\alpha = \ldots$

Denotato con K il campo ottenuto per tale valore, trovare

(a) La cardinalità di K : ...

(b) Un generatore (se esiste) del gruppo K^*, giustificando la risposta:

Soluzione. Il polinomio $x^4+\alpha x^2+x+1$ è irriducibile per $\alpha = 0$, infatti x^4+x+1 non ha radici in $\mathbb{Z}_2$ e non è un prodotto di due polinomi di secondo grado. Quindi per $\alpha = 0$, il quoziente è un campo K e la sua cardinalità è $2^4 = 16$.

Il gruppo moltiplicativo di un campo finito è sempre ciclico, quindi K^* è ciclico ed un generatore è per esempio $\bar{x}$. Infatti calcolando le prime cinque potenze di $\bar{x}$ non si ottiene l'elemento neutro $\bar{1}$, se ne deduce che $\bar{x}$ è un elemento di ordine 15, cioè un generatore di K^*.