

Nome e cognome

Matricola

ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
29 settembre 2016

1. Costruire un omomorfismo non banale dal gruppo ciclico $C_8 = \langle g \rangle$ al gruppo diedrale D_4 , disegnando delle frecce:

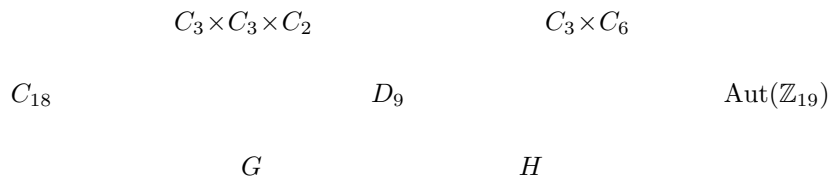
e	id
g	r
g^2	r^2
g^3	r^3
g^4	s
g^5	rs
g^6	r^2s
g^7	r^3s

Soluzione. Un omomorfismo è ad esempio quello che manda $\langle g^2 \rangle = \{e, g^2, g^4, g^6\}$ in id e gli altri elementi di C_8 in r^2 .

2. Dimostrare che un gruppo G di ordine 140 non è mai semplice.

Soluzione. $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Applicando i teoremi di Sylow si vede che esiste in G un unico 5-sottogruppo di Sylow che quindi è normale in G , da cui G non è semplice. In modo simile si poteva osservare che in G c'è un unico 7-Sylow.

3. Riconoscere i gruppi isomorfi ed unirli con un tratto di penna:



dove $G = C_9 \rtimes_{\phi} C_2$ (prodotto semidiretto, con $\phi : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_9)$ omomorfismo banale)

e dove $H = C_9 \rtimes_{\phi} C_2$ (prodotto semidiretto, con $\phi : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_9)$ omomorfismo non banale)

Soluzione. Si hanno i seguenti isomorfismi:

$$C_3 \times C_3 \times C_2 \cong C_3 \times C_6$$

$$G \cong C_{18} \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_{19})$$

$$H \cong D_9$$

Per quest'ultimo isomorfismo osserviamo che, se $C_2 = \langle h \rangle$ e $C_9 = \langle g \rangle$, allora $\text{Aut}(C_9) \cong C_6$ ed esiste un unico omomorfismo non banale di C_2 in $\text{Aut}(C_9)$, che manda h nell'automorfismo $\alpha : g \rightarrow g^{-1}$ di C_9 , da cui $H \cong D_9$.

4. Sia $F = \mathbb{F}_4$ il campo con quattro elementi e sia $f(x) = x^3 + x + 1 \in F[x]$.

a) $f(x)$ è irriducibile in $F[x]$ vero \bowtie falso \square

b) Se K è il campo di spezzamento di $f(x)$ su F , allora

$$[K : F] = \dots 3 \dots$$

c) Denotata con β una radice di $f(x)$, una base di K come spazio vettoriale su F è data da

$$\dots 1, \beta, \beta^2 \dots$$

d) Scrivere tutte le radici di $f(x)$ in funzione della base scelta.

$$\dots \beta, \beta^2, \beta^4 = \beta + \beta^2 \dots$$

5. Dato il polinomio $g(x) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$, il suo gruppo di Galois è isomorfo a ... e i campi intermedi sono.....

Soluzione. Il suo gruppo di Galois è isomorfo a $V = C_2 \times C_2$ (gruppo di Klein). Infatti

$$g(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

I campi intermedi tra \mathbb{Q} e il campo di spezzamento K di $g(x)$ sono: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, oltre ai campi banali (\mathbb{Q} e K).

6. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono risolubili per radicali

$$x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 \quad \text{risolubile } \times \quad \text{non risolubile } \square$$

$$x^8 - 25 \quad \text{risolubile } \times \quad \text{non risolubile } \square$$

$$x^5 + 5x^4 - 5 \quad \text{risolubile } \square \quad \text{non risolubile } \times$$

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{risolubile } \times \quad \text{non risolubile } \square$$

$$x^3 + 4x - 2 \quad \text{risolubile } \times \quad \text{non risolubile } \square$$