Nome e cognome ....

Matricola ....

ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
29 setttembre 2016

1. Costruire un omomorfismo non banale dal gruppo ciclico $C_8 = \langle g \rangle$ al gruppo diedrale D_4, disegnando delle frecce:

e	id
g	r
g^2	r^2
g^3	r^3
g^4	s
g^5	rs
g^6	r^2s
g^7	r^3s

   Soluzione. Un omomorfismo è ad esempio quello che manda $\langle g^2 \rangle = \{e, g^2, g^4, g^6\}$ in id e gli altri elementi di C_8 in r^2.

2. Dimostrare che un gruppo G di ordine 140 non è mai semplice.

   Soluzione. $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Applicando i teoremi di Sylow si vede che esiste in G un unico 5-sottogruppo di Sylow che quindi è normale in G, da cui G non è semplice. In modo simile si poteva osservare che in G c'è un unico 7-Sylow.

3. Riconoscere i gruppi isomorfi ed unirli con un tratto di penna:

	$C_3 \times C_3 \times C_2$		$C_3 \times C_6$	
C_{18}		D_9		$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{19})$
	G		H	

   dove $G = C_9 \ltimes_\phi C_2$ (prodotto semidiretto, con $\phi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_9)$ omomorfismo banale) e dove $H = C_9 \ltimes_\phi C_2$ (prodotto semidiretto, con $\phi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_9)$ omomorfismo non banale)

Soluzione. Si hanno i seguenti isomorfismi:

$C_3 \times C_3 \times C_2 \cong C_3 \times C_6$

$G \cong C_{18} \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{19})$

$H \cong D_9$

Per quest'ultimo isomorfismo osserviamo che, se $C_2 = \langle h \rangle$ e $C_9 = \langle g \rangle$, allora $\mathrm{Aut}(C_9) \cong C_6$ ed esiste un unico omomorfismo non banale di C_2 in $\mathrm{Aut}(C_9)$, che manda h nell'automorfismo $\alpha : g \to g^{-1}$ di C_9, da cui $H \cong D_9$.

4. Sia $F = \mathbb{F}_4$ il campo con quattro elementi e sia $f(x) = x^3 + x + 1 \in F[x]$.

   a) $f(x)$ è irriducibile in $F[x]$ vero $\bowtie$ falso $\square$

   b) Se K è il campo di spezzamento di $f(x)$ su F, allora

   $$[K : F] = \quad ...3...$$

   c) Denotata con β una radice di $f(x)$, una base di K come spazio vettoriale su F è data da

   $...1, \beta, \beta^2........$

   d) Scrivere tutte le radici di $f(x)$ in funzione della base scelta.

   $......\beta, \beta^2, \beta^4 = \beta + \beta^2........$

5. Dato il polinomio $g(x) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$, il suo gruppo di Galois è isomorfo a ... e i campi intermedi sono.....

   Soluzione. Il suo gruppo di Galois è isomorfo a $V = C_2 \times C_2$ (gruppo di Klein). Infatti

   $$g(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

   I campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e il campo di spezzamento K di $g(x)$ sono: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, oltre ai campi banali ($\mathbb{Q}$ e K).

6. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono risolubili per radicali

$x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

$x^8 - 25$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

$x^5 + 5x^4 - 5$ risolubile $\square$ non risolubile $\bowtie$

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

$x^3 + 4x - 2$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$