ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
15 setttembre 2016

1. Costrire un omomorfismo non banale dal gruppo diedrale D_4 al gruppo ciclico $C_8 = \langle g \rangle$, disegnando delle frecce:

id	e
r	g
r^2	g^2
r^3	g^3
s	g^4
rs	g^5
r^2s	g^6
r^3s	g^7

Soluzione. Un omomorfismo è ad esempio quello che manda le rotazioni di D_4 nell'elemento neutro e di C_8 e gli altri elementi di D_4 in g^4.

2. Elencare tutti i gruppi di ordine 325, motivando la risposta.

Soluzione. Risulta $325 = 5^2 \cdot 13$. Se G è un gruppo di ordine 325, applicando i teoremi di Sylow si ha che in G c'è un unico 5-Sylow H che è quindi normale e un unico 13-Sylow K, anch'esso normale. Quindi G è prodotto diretto $H \times K$. Sia H (di ordine un quadrato di un primo, $5^2 = 25$) che K sono abeliani e quindi anche G è abeliano. G è quindi isomorfo a $C_5 \times C_5 \times C_{13}$ oppure a $C_{25} \times C_{13}$.

3. Scrivere le classi di coniugio del gruppo $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, elencando gli elementi di ogni classe.

Soluzione. Gli elementi del gruppo sono le coppie ordinate (a, b), dove $a \in S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ e $b \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Le classi di coniugio sono:

$\{(\mathrm{id}, \bar{0})\}$, $\{(\mathrm{id}, \bar{1})\}$, $\{((12), \bar{0}), ((13), \bar{0}), ((23), \bar{0})\}$, $\{((12), \bar{1}), ((13), \bar{1}), ((23), \bar{1})\}$, $\{((123), \bar{0}), ((132), \bar{0})\}$, $\{((123), \bar{1}), ((132), \bar{1})\}$.

4. Sia K il campo di spezzamento di $f(x) = x^4 - x^3 - 3x + 3$ su $\mathbb{Q}$. Allora

   a) $[K : \mathbb{Q}] =$ ...6....

   b) Una base di K come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ è data da

   $\{1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}, \zeta, \zeta\sqrt[3]{3}, \zeta\sqrt[3]{3^2}\}$, dove ζ è una radice primitiva terza dell'unità. Infatti $f(x) = (x-1)(x^3-3)$ e per costruire il campo di spezzamento K bisogna fare una prima estensione di grado 3 e poi una di grado 2.

5. Determinare il gruppo di Galois del polinomio

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

   Descrivere inoltre la corrispondenza di Galois in questo caso.

   Soluzione. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1 = (x+1)^2(x^4+x^3+1)$ è la fattorizzazione in fattori irriducibili. Essendo il campo base un campo finito, si ottiene il campo di spezzamento K con una sola estensione di grado 4 di $\mathbb{Z}_2$. Chiamata α una radice di (x^4+x^3+1), risulta $K = \mathbb{Z}_2(\alpha) \cong \mathbb{F}_{2^4}$, il campo finito con 16 elementi. Il gruppo di Galois G del polinomio coincide con $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Z}_2)$ ed è ciclico di odine 4, generato dall'automorfismo di Frobenius $\psi : a \to a^2$. G ha un unico sottogruppo non banale, generato da ψ^2 corrispondente (nella corrispondenza di Galois) a un campo intermedio isomorfo a $\mathbb{F}_{2^2}$, estensione di grado 2 di $\mathbb{Z}_2$. Per esprimere questo campo come estensione semplice di $\mathbb{Z}_2$ bisogna trovare un elemento di $K \setminus \mathbb{Z}_2$ fissato da ψ^2.

6. Stabilire quali dei seguenti numeri reali sono costruibili con riga e compasso:

   $\frac{\sqrt[3]{5}+3}{2}$ costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $\frac{2\pi}{9}$ costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $\sin(\frac{2\pi}{5})$ costruibile $\bowtie$ non costruibile $\square$

   $\frac{2\pi}{5}$ costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $0,00054$ costruibile $\bowtie$ non costruibile $\square$