ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
12 luglio 2016

1. Costruire una catena di risolubilità con quozienti ciclici di ordine primo per il gruppo $G = S_4 \times C_6$

   $G = S_4 \times C_6 \trianglerighteq \dots$

   Soluzione: Possiamo considerare la catena di sottogruppi, ognuno normale nel precedente:
   $G = S_4 \times C_6 \trianglerighteq S_4 \times C_3 \trianglerighteq S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V \trianglerighteq C_2 \trianglerighteq \{e\}$
   dove V è il sottogruppo di A_4 dato da $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

   I cui quozienti risultano $C_2, C_3, C_2, C_3, C_2, C_2$

2. Sia G un gruppo e $Z(G)$ il suo centro. Dimostrare che:
   a) se il quoziente $G/Z(G)$ è un gruppo ciclico allora G è abeliano.
   b) se G è non abeliano di ordine p^3 (con p primo), allora $Z(G)$ ha ordine p.

   Soluzione: a) se il quoziente $G/Z(G)$ è un gruppo ciclico e se $aZ(G)$ è un suo generatore, ogni classe è del tipo $a^iZ(G)$, per qualche $i \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $x, y \in G$, si ha $x = a^iz$ e $y = a^j\bar{z}$, per qualche $z, \bar{z} \in Z(G)$. Quindi
   $$xy = a^iza^j\bar{z} = a^{i+j}z\bar{z} = a^j\bar{z}a^iz = yx$$

   b) Se $|G| = p^3$ allora è un p-gruppo e il suo centro è non banale. Quindi $|Z(G)| = p$ o p^2 (p^3 è escluso perché G non è abeliano). Se fosse $|Z(G)| = p^2$, allora $|G/Z(G)| = p$, da cui $G/Z(G)$ ciclico e per il punto a) G sarebbe abeliano.

3. Trovare i gruppi isomorfi, unendoli con un tratto di penna (notazioni: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^{>0} = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$)

   $(\mathbb{C}, +)$ $\qquad$ $(\mathbb{Z}, +)$ $\qquad$ $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ $\qquad$ $(\mathbb{R}, +)$ $\qquad$ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

   $H = (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$ $\qquad$ $K = (\{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, +)$

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}/K$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{C}^*/H$

Soluzione: Ci sono i seguenti isomorfismi:
$(\mathbb{C},+)\cong(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$
$H\cong\mathbb{R}/K$
$\mathbb{Z}\cong K$
$(\mathbb{R}^{>0},\cdot)\cong C^*/H$

4. Sia ζ una radice primitiva n-esima dell'unità, con $n>2$. Allora:
Ogni estensione ciclotomica $\mathbb{Q}(\zeta)$ contiene almeno un'estensione quadratica di $\mathbb{Q}$:
vero $\bowtie$ $\qquad$ falso $\Box$
Ogni estensione quadratica di $\mathbb{Q}$ è contenuta in almeno un'estensione ciclotomica $\mathbb{Q}(\zeta)$ (per un opportuno n):
vero $\bowtie$ $\qquad$ falso $\Box$
Se n è un primo dispari, allora $\mathbb{Q}(\zeta)$ contiene una e una sola estensione quadratica di $\mathbb{Q}$:
vero $\bowtie$ $\qquad$ falso $\Box$
Se $\mathbb{Q}(\zeta)$ contiene una e una sola estensione quadratica di $\mathbb{Q}$, allora n è un primo dispari:
vero $\Box$ $\qquad$ falso $\bowtie$
(per esempio per la settima estensione ciclotomica coincide con la quattordicesima estensione ciclotomica e l'unica estensione quadratica contenuta è $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$.)

5. Sia $f(x)=x^{25}-x\in\mathbb{Z}_5[x]$.

a) I fattori irridicibili di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ hanno i seguenti gradi ...

b) Il numero dei fattori irriducibili di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ è ...

c) Scrivere almeno due fattori irriducibili di $f(x)$ di grado superiore al primo ...

Soluzione: a) I fattori irridicibili di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ hanno grado 1 e 2, anzi sono tutti i polinomi irriducibili di $\mathbb{Z}_5[x]$ di grado 1 e 2, poiché $25=5^2$.

b) I fattori irriducibili di grado 1 sono cinque: $x,(x-1),(x-2),(x-3),(x-4)$. Dovendo raggiungere grado 25 i fattori irriducibili di grado 2 saranno $\frac{25-5}{2}=10$.

c) Per esempio x^2-2 e x^2-3.

6. Descrivere la corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento di $x^3 + 4$ su $\mathbb{Q}$.

   Soluzione: Il gruppo di Galois è S_3, che possiamo pensare come gruppo delle permutazioni sulle tre radici di $x^3 + 4$, $\alpha_1 = -\sqrt[3]{4}$, $\alpha_2 = -\zeta\sqrt[3]{4}$ e $\alpha_3 = -\zeta^2\sqrt[3]{4}$, dove ζ è una radice primitiva terza dell'unità. In corrispondenza dei sottogruppi non banali di S_3: $\langle(\alpha_1\alpha_2)\rangle$, $\langle(\alpha_2\alpha_3)\rangle$, $\langle(\alpha_1\alpha_3)\rangle$, $\langle(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\rangle$, troviamo rispettivamente i campi intermedi: $\mathbb{Q}(\alpha_3)$, $\mathbb{Q}(\alpha_1)$, $\mathbb{Q}(\alpha_2)$, $\mathbb{Q}(\zeta)$.