ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
20 giugno 2016

1. Costrire un omomorfismo non banale dal gruppo Q delle unità dei quaternioni al gruppo ciclico $C_6 = \langle g \rangle$, disegnando delle frecce:

1	
-1	e
i	g
$-i$	g^2
j	g^3
$-j$	g^4
k	g^5
$-k$	

Soluzione: Se $f : Q \to C_6$ è un omomorfismo, per il teorema di omomorfismo si deve avere $Q/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$. Un omomorfismo non banale è per esempio quello che manda $\{1, -1, i, -i\}$ in e e gli altri elementi di Q in g^3.

2. Applicando i teoremi di Sylow, dimostrare che un gruppo di ordine 30 non è mai semplice.

Soluzione: Sia G un gruppo di ordine 30. Per i teoremi di Sylow i 3-sottogruppi di Sylow di G sono 1 o 10 e i 5-sottogruppi di Sylow sono 1 o 6. Per motivi di cardinalità, non possono esserci 10 3-Sylow e 6 5-Sylow. Quindi un 3-Sylow o un 5-Sylow è unico del suo ordine e quindi normale, da cui G non è semplice.

3. Consideriamo nel gruppo simmetrico S_5 la trasposizione $\sigma = (1, 2)$.

La cardinalità della classe di coniugio di σ è 10

La cardinalità del centralizzante di σ è 12

Elencare gli elementi del centralizzante di σ:

$\{\mathrm{id}, (12), (34), (35), (45), (12)(34), (12)(35), (12)(45), (345), (354), (12)(345), (12)(354)\}$

4. Sia K il campo di spezzamento di $f(x) = x^5 + x + 1$ su $\mathbb{Z}_2$, allora

   a) La fattorizzazione in fattori irriducibili di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ è:

   $$......(x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)...........$$

   b) $[K : \mathbb{Z}_2] =$ ...6..

   c) Una base di K su $\mathbb{Z}_2$ è data dalle potenze di una radice di $f(x)$
   vero $\square$ falso $\bowtie$

   d) La fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ in $K[x]$ è:

   $$(x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^2 + \alpha + 1)(x - \beta)(x - \beta + 1)$$

   dove α è una radice del primo fattore irriducibile e β una radice del secondo.

   e) Il numero dei campi intermedi L, $\mathbb{Z}_2 \subseteq L \subseteq K$ è:

   ....4.....

5. Sia ζ una radice primitiva ventesima dell'unità.

a) Il gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta), \mathbb{Q})$ è isomorfo a:

C_{20} $\square$ C_8 $\square$ $C_2 \times C_4$ $\bowtie$ V $\square$ S_8 $\square$

(gruppo degli invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$)

b) Stabilire il numero delle estensioni quadratiche di $\mathbb{Q}$ contenute in $\mathbb{Q}(\zeta)$:

......3 (quanti sono i sottogruppi di indice 2 di $C_2 \times C_4$)

ed elencarle : $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$

6. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono risolubili per radicali:

$x^7 - 2$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

$2x^5 - 5x^4 + 5$ risolubile $\square$ non risolubile $\bowtie$

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

(è il settimo polinomio ciclotomico, che ha gruppo di Galois abeliano, quindi risolubile)

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$

$x^3 - 6x^2 + 4x + 12$ risolubile $\bowtie$ non risolubile $\square$