

ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

19 maggio 2016

1. Dimostrare che, per ogni $n > 1$, la somma delle radici n -esime dell'unità è uguale a zero.
2. Dimostrare che
 - a) per ogni n , la trasposizione $(1\ 2)$ e il ciclo $(1\ 2\ \dots\ n)$ generano il gruppo simmetrico S_n .
 - b) Se p è primo, una trasposizione e un ciclo di lunghezza p generano S_p .
3. Trovare i gruppi di Galois di $x^8 - 4$, di $x^8 - 9$ e di $x^5 + 3x^2 - 3x - 3$ su \mathbb{Q} .
4. Trovare un polinomio di $\mathbb{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois sia isomorfo a $C_2 \times C_6$, dove C_i è il gruppo ciclico di ordine i .
5. Trovare il campo di spezzamento E di $X^{63} - 1$ su \mathbb{Z}_3 . Esplicitare la corrispondenza di Galois in questo caso per l'estensione $\mathbb{Z}_3 \subset E$.
6. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le radici di

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

e sia E il campo di spezzamento di $f(x)$ su \mathbb{Z}_3 .

Stabilire se $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ e/o $\{\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}\}$ formano una base di E come spazio vettoriale su \mathbb{Z}_3 .

7. Stabilire quali dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$ sono risolubili per radicali:

$$x^5 - 4x + 2$$

$$x^6 - 4x^2 + 2x$$

$$x^5 + 4x$$

$$x^5 - 11$$

$$x^5 + 3x^2 - 3x - 3$$