ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
5 maggio 2016

1. Sia $F \subset K$ un'estensione di campi finita e normale (ovvero di Galois). Dato un campo intermedio L, $F \subseteq L \subseteq K$, dimostrare che l'estensione $F \subset L$ è normale se e soltanto se $\sigma(L) = L$, per ogni $\sigma \in \mathrm{Gal}(K, F)$.

2. a) Trovare il campo di spezzamento E di
$$f(x) = (x^4 - 5x^2 + 6)(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 2)$$
su $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   b) Scrivere inoltre la fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ in $E[x]$, una base di E come spazio vettoriale su F e una base di E come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

   c) Trovare il gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(E, F)$ e descrivere la corrispondenza di Galois in questo caso.

   d) Descrivere l'azione del gruppo G sulle otto radici di $f(x)$.

3. Sia K il campo di spezzamento di un polinomio $f(x) \in F[x]$ (F campo) con radici tutte distinte. Dimostrare che l'azione del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(K, F)$ sulle radici di $f(x)$ è transitiva (cioè c'è una sola orbita) se e soltanto se $f(x)$ è irriducibile su F.

4. Per ognuno dei seguenti polinomi, a coefficienti nei rispettivi campi, trovare il campo di spezzamento, scrivere la fattorizzazione in fattori lineari e descrivere la corrispondenza di Galois.

   $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Z}_2$

   $x^4 + x^2 + 1$ su $\mathbb{Z}_2$

5. Stabilire se esiste un campo con 4096 elementi e in caso affermativo trovare tutti i suoi sottocampi.

6. Stabilire se gli angoli $2\pi/20$ e $2\pi/7$ si possono trisecare con riga e compasso.

7. Stabilire se si può trovare con riga e compasso il raggio del cerchio di area tripla rispetto a un cerchio dato.