

## ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

28 aprile 2016

1. Trovare il campo di spezzamento di

$$x^6 - 5x^3 + 6$$

su  $\mathbb{Q}$  e su  $\mathbb{Z}_7$ , indicando i gradi delle corrispondenti estensioni di campi.

2. Siano  $F \subseteq K$  campi ed  $\alpha, \beta \in K$  elementi algebrici di grado 3 su  $F$ . Stabilire quali sono i valori possibili per  $[F(\alpha, \beta) : F]$ , dando un esempio per ognuno di essi.

3. Dimostrare che se  $\alpha$  è un elemento algebrico di grado dispari su un campo  $F$ , allora  $F(\alpha) = F(\alpha^2)$

4. Stabilire se gli anelli

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2) \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$$

sono isomorfi e, in caso affermativo, esplicitare un isomorfismo.

5. Sia  $K$  un campo con quattro elementi e sia  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ . Trovare il campo di spezzamento  $E$  di

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 1$$

su  $K$ . Scrivere inoltre la fattorizzazione in fattori lineari di  $f(x)$  in  $E[x]$ , una base di  $E$  come spazio vettoriale su  $K$  e una base di  $E$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$ .

6. Mostrare l'isomorfismo di anelli

$$\mathbb{Q}[x]/(x^n - 1) \cong \prod_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d)$$

dove  $\prod$  indica il prodotto diretto e  $\zeta_d$  una radice primitiva  $d$ -esima dell'unità.

7. a) Verificare che tutti e soli i polinomi irriducibili su  $\mathbb{Z}_3$  di grado 1 e 2 sono i fattori irriducibili del polinomio  $x^9 - x$ .

b) Dimostrare che tutti e soli i polinomi irriducibili su  $\mathbb{Z}_p$  di grado uguale a un divisore di  $n$  sono i fattori irriducibili del polinomio  $x^{p^n} - x$ .