PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
19 aprile 2016

1. Riconoscere nella seguente lista i gruppi tra loro isomorfi (ed unirli con un tratto di matita):

   C_{18} $\quad D_9 \quad \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{19})$

   A_{18} $\quad C_2 \times C_3 \times C_3 \quad C_3 \times C_6$

   $G \quad K$

   Avendo posto:

   $G := C_9 \ltimes_\Phi C_2$ (dove $\Phi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_9)$ è l'omomorfismo banale)

   $K := C_9 \ltimes_\Psi C_2$ (dove $\Psi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_9)$ è un omomorfismo non banale)

   Soluzione. Abbiamo $C_{18} \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{19}) \cong G$,

   $C_2 \times C_3 \times C_3 \cong C_3 \times C_6$

   $D_9 \cong K$

2. Dimostrare che un gruppo G di ordine 500 (oppure 1372) è risolubile e stabilire se possiede un sottogruppo di indice 2.

   Soluzione: $500 = 2^2 \cdot 5^3$ (oppure $1372 = 2^2 \cdot 7^3$). Il numero dei 5-sottogruppi di Sylow di G è s_5 tale che s_5 divide 4, $s_5 \equiv 1 \pmod 5$. Quindi $s_5 = 1$ e G ha un unico 5-Sylow N che è un sottogruppo normale di G. N ha ordine 5^3, quindi è un p-gruppo ed è risolubile. (oppure: Il numero dei 7-sottogruppi di Sylow di G è s_7 tale che s_7 divide 4, $s_7 \equiv 1 \pmod 7$. Quindi $s_7 = 1$ e G ha un unico 7-Sylow N che è un sottogruppo normale di G. N ha ordine 7^3, quindi è un p-gruppo ed è risolubile.) Inoltre il quoziente G/N ha ordine 4, quindi è abeliano e di conseguenza risolubile. Ne segue che anche G è risolubile.

   Inoltre per la corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G contenenti N e i sottogruppi di G/N, in corrispondenza di un sottogruppo H/N di G/N di indice due, ci sarà un sottogruppo H di indice due in G.

3. Trovare le classi di coniugio e scrivere la relativa equazione delle classi per $D_6 = \{id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$

   Soluzione: Le classi di coniugio sono:

$$\{id\}, \{r^3\}, \{r, r^5\}, \{r^2, r^4\}, \{s, r^2s, r^4s\}, \{rs, r^3s, r^5s\}$$

   e l'equazione delle classi è $12 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3$

   Oppure: Trovare le classi di coniugio e scrivere la relativa equazione delle classi per il gruppo delle unità dei quaternioni $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$

   Soluzione: Le classi di coniugio sono:

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

   e l'equazione delle classi è $8 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$

4.
   - Il gruppo ciclico $C_{108} = \langle g \rangle$ è prodotto diretto di due sottogruppi propri: vero $\bowtie$ falso $\Box$

     In caso sia vero, i due sottogruppi sono

     $H = \langle g^4 \rangle$ (di ordine 27) $K = \langle g^{27} \rangle$ (di ordine 4)

     (descriverli in funzione del generatore g)

     .... e sono univocamente determinati: vero $\bowtie$ falso $\Box$

     Oppure: Il gruppo ciclico $C_{200} = \langle g \rangle$ è prodotto diretto di due sottogruppi propri: vero $\bowtie$ falso $\Box$

     In caso sia vero, i due sottogruppi sono

     $H = \langle g^8 \rangle$ (di ordine 25) $K = \langle g^{25} \rangle$ (di ordine 8)

     (descriverli in funzione del generatore g)

     .... e sono univocamente determinati: vero $\bowtie$ falso $\Box$

   - Il gruppo delle unità dei quaternioni $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri:

     vero $\Box$ falso $\bowtie$

     In caso sia vero, i due sottogruppi sono

     $H = \dots$ $K = \dots$

     .... e sono univocamente determinati: vero $\Box$ falso $\Box$

- Il gruppo diedrale $D_n = \{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$ $(n \geq 3)$ è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri:

  vero $\boxtimes$ falso $\square$

  In caso sia vero, i due sottogruppi sono

  $N = \langle r \rangle$ $K = \langle s \rangle$
  (normale)

  .... e sono univocamente determinati: vero $\square$ falso $\boxtimes$

- Il gruppo alterno A_4 è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri:
  vero $\boxtimes$ falso $\square$

  In caso sia vero, i due sottogruppi sono

  $N = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ $K = \langle (123) \rangle$
  (normale)

  .... e sono univocamente determinati: vero $\square$ falso $\boxtimes$

  Il gruppo alterno A_5 è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri:
  vero $\square$ falso $\boxtimes$

  In caso sia vero, i due sottogruppi sono

  $N = \dots$ $K = \dots$
  (normale)

  .... e sono univocamente determinati: vero $\square$ falso $\square$

5. Trovare il polinomio minimo di $(\sqrt{5}+2)i$ sui rispettivi campi:

   su $\mathbb{C}$: $x - (\sqrt{5}+2)i$

   su $\mathbb{R}$: $x^2 + 9 + 4\sqrt{5}$

   su $\mathbb{Q}$: $x^4 + 18x^2 + 1$

   su $\mathbb{Q}(i)$: $x^2 - 4ix + 1$

   su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$: $x^2 + 9 + 4\sqrt{5}$

   su $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$: $x^2 - 2\sqrt{5}ix - 1$

Oppure: Trovare il polinomio minimo di $(\sqrt{2}+1)i$ sui rispettivi campi:

su $\mathbb{C}$: $x-(\sqrt{2}+1)i$

su $\mathbb{R}$: $x^2+3+2\sqrt{2}$

su $\mathbb{Q}$: x^4+6x^2+1

su $\mathbb{Q}(i)$: $x^2-2ix+1$

su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $x^2+3+2\sqrt{2}$

su $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$: $x^2-2i\sqrt{2}x-1$

6. Determinare il numero dei $\mathbb{Q}$-omomorfismi di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$

   in $\mathbb{C}$: 4

   in $\mathbb{R}$: 2

   in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$: 0

   in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$: 2

   in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: 0

   Oppure: Determinare il numero dei $\mathbb{Q}$-omomorfismi di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$

   in $\mathbb{C}$: 4

   in $\mathbb{R}$: 2

   in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$: 2

   in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$: 0

   in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$: 0