ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
7 aprile 2016

1. Sia $A = \mathbb{R}[x]/I$, dove

$$I = (2x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2,\ x^8 - x^7 + x^6 - x^5)$$

   a) Elencare tutti gli ideali dell'anello $A$ con le relative relazioni di inclusione.

   b) Per ogni ideale massimale $M$ di $A$, descrivere l'anello quoziente $A/M$.

   c) Stabilire se la classe di $x + 1$ in $A$ è invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inverso.

2. Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono irriducibili sui rispettivi campi:
   $x^7 + 11x^3 + 33x + 22$ su $\mathbb{Q}$.
   $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Q}$.
   $x^4 + 7$ su $\mathbb{Z}_{17}$.
   $x^4 - 6x^2 + 11$ su $\mathbb{R}$.

3. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono campi isomorfi.

4. Per ciascuno dei seguenti numeri complessi $a$, trovare il polinomio minimo di $a$ su $\mathbb{Q}$, determinare $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ e dare esplicitamente una base per $\mathbb{Q}(a)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

$$2/3, \quad \sqrt{5} + 2, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad 1/2 + i\sqrt{3}/2$$

5. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, e su $\mathbb{Q}$.

6. Verificare che $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, dare una base per $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{3}})$, come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e trovare l'inverso di

$$1 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}$$

   in $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{3}})$.

7. Costruire un campo con nove elementi e trovare il gruppo dei suoi automorfismi.

8. Consideriamo l'insieme

$$A = \{aI + bJ; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

   dove $I$ è la matrice $2 \times 2$ identica e $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che $A$ è un campo rispetto alle usuali operazioni tra matrici.

b) Trovare la caratteristica di $A$ e il suo sottocampo fondamentele $F$.

c) Stabilire se l'elemento $J \in A$ è algebrico su $F$ e determinare $[A : F]$.

d) Dimostrare che $A$ è isomorfo ad un opportuno quoziente di $\mathbb{Q}[x]$.

9. Siano $F \subseteq K \subseteq L$ campi, con $[K : F] = n$ e $[L : K] = m$. Se $\{k_1, \ldots, k_n\}$ è un base di $K$ come spazio vettoriale su $F$ e $\{h_1, \ldots, h_m\}$ è un base di $L$ come spazio vettoriale su $K$, verificare che gli elementi $\{k_i h_j ; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ formano una base di $L$ su $F$, cioè generano $L$ come spazio vettoriale su $F$ e sono linearmente indipendenti.

10. Riconoscere nella seguente lista gli anelli tra loro isomorfi:

$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ $\qquad$ $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$ $\qquad$ $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}/2)$ $\qquad$ $\mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$ $\qquad$ $\mathbb{Q}(-1/2+i\sqrt{3}/2)$ $\qquad$ $\mathbb{R}[x]/(x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2})$