ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

31 marzo 2016

1. Dimostrare che un gruppo di ordine pq, con p e q numeri primi è risolubile.

2. Provare che per ogni n, il derivato n-esimo $G^{(n)}$ di un gruppo G è caratteristico in G.

3. Provare che un gruppo di ordine 130 è risolubile.

4. Sia H un p-sottogruppo normale di un gruppo G. Provare che H è contenuto in ogni p-sottogruppo di Sylow di G.

5. Sia $G_1 \to G_2$ una biiezione tra due gruppi che conserva l'ordine degli elementi. Dimostrare che i due gruppi sono isomorfi, oppure dare un controesempio.

6. Dimostrare che un gruppo G di ordine 105:

   (a) contiene un sottogruppo di ordine 35, e questo è ciclico

   (b) G è risolubile

   (c) se un sottogruppo di ordine 3 di G è normale, allora G è ciclico

7. Dimostrare che un gruppo di ordine 200 è risolubile, esibendo una serie normale a quozienti di ordine primo.

8. Mostrare che, se G è un gruppo risolubile finito, allora esiste una serie normale a quozienti di ordine primo, cioè una catena di sottogruppi

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = \{e\}$$

   tale che per ogni i, $i = 0, \ldots n-1$, G_i/G_{i+1} è ciclico di ordine primo.

9. Determinare i gruppi di ordine 63.