

## ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

18 marzo 2016

1. Trovare il normalizzante di  $\langle(123)\rangle$  in  $S_4$ .
2. Trovare tutti i  $p$ -sottogruppi di Sylow del gruppo alterno  $A_5$ .
3. Scrivere l'equazione delle classi per  $A_5$ .
4. Un gruppo si dice semplice se non possiede sottogruppi normali non banali. Utilizzando i teoremi di Sylow, dimostrare che:
  - a) un gruppo di ordine 1000 non è mai semplice.
  - b) un gruppo di ordine  $2p^n$ , con  $p$  primo dispari, non è mai semplice.
5. Stabilire quanti e quali sono i gruppi *abeliani* (non isomorfi tra loro) di ordine 243.
6. Stabilire quanti e quali sono i gruppi (non isomorfi tra loro) di ordine 99.
7. Trovare gli elementi di ordine quattro in

$$C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_\infty \times C_\infty$$

(dove si indica con  $C_n$  il gruppo ciclico di ordine  $n$  e con  $C_\infty$  il gruppo ciclico infinito,  $C_\infty \cong \mathbb{Z}$ ).

8. Stabilire se i gruppi  $G_1$  e  $G_2$  sono isomorfi

$$G_1 = C_{25} \times C_{27} \times C_3 \times C_{16} \times C_8 \times C_2$$

$$G_2 = C_{10800} \times C_{24} \times C_2$$

9. Dimostrare che ogni gruppo abeliano finito si può scrivere nella forma

$$C_{d_1} \times \cdots \times C_{d_s}$$

dove  $d_i$  divide  $d_{i-1}$  per  $i = 2, \dots, s$ .

10. Sia  $\Phi : C_4 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$  un omomorfismo suriettivo. Costruire il prodotto semidiretto  $G$  di  $C_3$  con  $C_4$  tramite  $\Phi$ . Qual'è l'ordine di  $G$ ? E' un gruppo abeliano? E' isomorfo a un gruppo diedrale? a un gruppo alterno?
11. Siano assegnati due gruppi  $N$  ed  $H$ . Se  $G$  è un gruppo tale che  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$  e  $G/N \cong H$ , allora  $G$  è un prodotto semidiretto di  $N$  per  $H$ .      vero       falso