

ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

10 marzo 2016

1. Riconoscere nella seguente lista i gruppi tra loro isomorfi (ed unirli con un tratto di matita):

$U(\mathbb{Z}_{21})$

$D_6$

$\text{Aut}(C_{13})$

$C_3 \times C_4$

$C_2 \times C_6$

2. Trovare le classi di coniugio e scrivere la relativa equazione delle classi per i seguenti gruppi:  $C_6$ ,  $S_3$ ,  $D_4$ ,  $S_4$ ,  $A_4$ .
3. Dimostrare che se  $G$  è un gruppo con sole due classi di coniugio, allora  $G \cong C_2$ .
4. Dimostrare che il centro del gruppo diedrale  $D_n$  ha ordine 1 o 2, a seconda che  $n$  sia pari o dispari.
5. Dimostrare che se  $p$  è primo,  $p > 2$ , allora gli elementi di ordine 2 del gruppo diedrale  $D_p$  sono tutti nella stessa classe di coniugio.
6. Consideriamo l'azione del gruppo  $O_2(\mathbb{R})$  delle matrici ortogonali  $2 \times 2$  a coefficienti reali su  $\mathbb{R}^2$ . Trovare orbita e stabilizzatore per  $(0, 0)$  e per  $(0, -1)$ .
7. Trovare i sottogruppi di  $S_4$  isomorfi a  $D_4$ . Quanti sono? Sono dei sottogruppi normali di  $S_4$ ?
8. a) In un gruppo ciclico non possono esserci due elementi distinti di ordine due. vero  falso
- b) Un gruppo ciclico finito ha un solo elemento di ordine  $d$ , per ogni divisore  $d$  dell'ordine del gruppo. vero  falso
- c) Per ogni  $n > 2$ , in  $U(\mathbb{Z}_n)$  c'è almeno un elemento di ordine due. vero  falso
9. Elencare (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi di ordine  $\leq 7$ .
10. Dimostrare che, se per  $x, y$  in un gruppo si ha

$$yxy^{-1} = x^{-1}$$

allora  $y^2$  è un elemento del centralizzante di  $x$ .