COMPLEMENTI al Corso di Matematica III

Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da un parametro

Talvolta è necessario stabilire la continuità o la derivabilità di integrali dipendenti da un parametro.

Enunciamo senza dimostrazione alcuni teoremi fondamentali.

Sia f:Ax**R**→**R,** A intervallo reale, consideriamo la funzione F:A→**R** definita mediante l'espressione integrale

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt \qquad \text{a,b numeri reali fissati.}$$

TEOREMA 1

Sia f:Ax**R**→**R** continua nel suo dominio e dotata di derivata parziale rispetto ad x continua in AX**R** allora F $\in$C^1(A) e si ha

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)dt$$

COROLLARIO 1

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, posto

$$F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)dt \qquad x \in A, \quad y,z \in \mathbf{R}$$

riesce $i)F(x,y,z)$ è continua in Ax$\mathbf{R}^2$ $ii)$ F è derivabile parzialmente rispetto alle tre variabili e

$$F_x(x,y,z) = \int_y^z f_x(x,t)dt \quad F_y(x,y,z) = -f(x,y) \qquad F_z(x,y,z) = f(x,y)$$

La prima derivata si ottiene usando il teorma precedente mentre per le altre due basta tener conto che quando si fanno le derivate parziali tutte le altre variabili vanno considerate costanti e utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni di una variabile.

COROLLARIO 2

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, posto

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$$

con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ continue e derivabili in A, si ha G $\in$C^1(A) con

$$G'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,t)dt - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + f(x,\beta(x))\beta'(x)$$

Dimostrazione

La tesi si ricava dal precedente Corollario, tenuto conto che $G(x) = F(x,\alpha(x),\beta(x))$, applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte.