$\mathbb{MATEMATICA}$ $\mathbb{III}$ a.a. 2014-2015

Esercizi di rieèpilogo sulla prima parte

1) Trovare il dominio delle seguenti funzioni, disegnarlo nel piano xy e dire se è aperto, chiuso, limitato.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \arcsin(xy-y-2x) \\ g(x,y) &= \frac{\sqrt[2]{(x^2-2x-y)(x^2-2x+y)}}{(2x-3)^2+(2y-1)^2} + \ln\frac{x+1}{2-x} \end{aligned}$$

Soluzione

La funzione arcseno è definita solo se l'argomento appartiene all'intervallo chiuso é [-1,1]. Pertanto per la funzione $f(x,y)$ deve essere

-1$\leq xy-y-2x \leq 1$ cioè $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>1, \frac{2x-1}{x-1} \leq y \leq \frac{2x+1}{x-1}\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x<1, \frac{2x+1}{x-1} \leq y \leq \frac{2x-1}{x-1}\right\}$.

Questo insieme è la parte di piano compresa tra due iperboli di asintoti x=1 e y=2. L'insieme è chiuso ma non limitato.

Per ottenere l'insieme di definizione di g deve essere $(x^2-2x-y)(x^2-2x+y) \geq 0, (x,y) \neq (3/2,1/2), -1<x<2$.

L'insieme è limitato ma non è nè chiuso nè limitato.

2)Sia

$$f(x,y) = \frac{arctg(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)}$$

determinare il dominio e calcolare se esistono i limiti di $f(x,y)$per $(x,y)\to(0,0)$ e per $(x,y)\to(1,1)$

Soluzione

L'insieme di definizione è $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x\neq 0, x\neq \pm y\right\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)}{x^2(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x(x+y)}$$

e quindi il limite non esiste.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{arctg(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(x-y)}{x^2(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x(x+y)} = \frac{1}{2}$$

3) Data la funzione

$$f(x,y) = y\sqrt{|x|}\ +2x$$

i) dimostrare che f è differenziabile in (0,0) e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in (0,0,0),

ii) per quali valori $(x,y)\neq(0,0)$ esistono entrambe le derivate parziali f_x, e f_y?.

Soluzione

$$
\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}0+2h}{h} = 2, \quad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{0}-0}{h} = 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sqrt{|x|}\ +2x-2x}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{|x|} = 0
\end{aligned}
$$

L'equazione del piano tangente è z-0=2x

La derivata parziale rispetto ad y esiste in ogni punto del piano. La derivata parziale rispetto ad x non esiste nei punti (0,y_0) con $y_0 \neq 0$

4) Sia

$$
f(x,y) = \frac{[\cos(x+y) - e^{x+y}]sen(x-y)}{x^2-y^2}
$$

determinare

a) il dominio di f

b) il più grande insieme in cui f è prolungabile per continuità

c) il prolungamento

Soluzione

il dominio di f è $\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2; x \neq \pm y\right\}$ Vediamo se f è prolungabile per continuità nei punti (0,0),(x_0,x_0) e $(x_0,-x_0)$ con $x_0 \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[\cos(x+y)-e^{x+y}]}{x+y}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-(x+y)^2/2-1-(x+y)}{(x+y)} = -1 \\
\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{[\cos(x+y)-e^{x+y}]}{x+y}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)} &= \frac{\cos 2x_0 - e^{2x_0}}{2x_0} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{[\cos(x+y)-e^{x+y}]}{x+y}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)} =
\end{aligned}
$$

La funzione e prolungabile per continuità su tutto $\mathbf{R}^2$.

Il prolungamento è la funzione $\widetilde{f}(x,y) = f(x,y)$ se $x \neq \pm y$ $\widetilde{f}(x,y) = \frac{\cos 2x - e^{2x}}{2x}$ se $x = y$ $x \neq 0$, $\widetilde{f}(x,y) = -\frac{sen 2x}{2x}$ se $x=-y$ $x \neq 0$ $\widetilde{f}(0,0) = -1$

5) Determinare i coseni direttori della retta normale alla superficie grafico della funzione $f(x,y) = x^y$ nel punto (1,1,1).

Soluzione

I coseni direttori della retta normale coincidono con i coefficienti normalizzati del piano tangente alla superficie.

$f_x(x,y) = yx^{y-1}$ $f_x(1,1) = 1$ $f_y(x,y) = \log x\ x^y$ $f_y(1,1) = 0$. I coseni direttori sono $(1/\pm\sqrt{2}, 0, -1/\pm\sqrt{2})$

6) Scrivere il polinomio di Taylor di terzo grado di punto iniziale (0,0) delle funzioni:

$$
f(x,y) = 2x + x^3 - y + y^3 + 3x^4 - 4y^2x^2 \qquad\qquad g(x,y) = sin(2x+y)
$$

Soluzione

I polinomi di Taylor si posono trovare con le formule illustrate a lezione.

E' più semplice osservare che se si parte da un polinomio e si cerca il suo polinomio di Taylor di terzo grado e di punto iniziale (0,0) questo è il polinomio di partenza in cui si devono trascurare i termini di grado superiore al terzo. $\mathrm{T}_3 f = 2x + x^3 - y + y^3$. Per la funzione g basta ricordare lo sviluppo di $sint = t - \frac{t^3}{3!}$ e sostituire a t $2x + y$. $\mathrm{T}_3 g = 2x + y - \frac{1}{3!}(2x + y)^3$

7)Siano

$$f(x,y) = x^3+3x^2+4xy+y^2 \qquad g(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2), \qquad h(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$$

determinare i punti critici di f , di g e di h e stabilirne la natura.

Soluzione

Per trovare i punti critici bisogna risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$. $\begin{cases} 3x^2 + 6x + 4y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

Le cui soluzioni sono $(0,0)$, $(2/3, -4/3)$.

Per stabilire la natura dei punti critici bisogna studiare la forma quadratica $f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2$.

$f_{xx}(x,y) = 6x + 6$ $\quad f_{xy}(x,y) = 4$ $\quad f_{yy}(x,y) = 2$ $\quad \det H_f(0,0) = 12 - 16 < 0$ La forma è indefinita e quindi (0,0) è un pinto di sella per f. $\det H_f(2/3, -4/3) = 20 - 16 = 4$. La forma è definita positiva ed il punto (2/3,-4/3) è un pinto di minimo per f.

Seguendo lo stesso procedimento per g si ha $\begin{cases} e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0 \\ -e^{x-y}(x^2 + 4y - 2y^2) = 0 \end{cases}$

Le cui soluzioni sono $(0,0)$, (-4, -2).

$g_{xx}(x,y) = .e^{x-y}(x^2+4x-2y^2+2)$ $\quad g_{xy}(x,y) = -e^{x-y}(x^2+2x-2y^2+4y)$ $g_{yy}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + 8y - 2y^2 - 4)$ $\det H_f(0,0) = -8$.La forma è indefinita e quindi (0,0) è un punto di sella per g.

$\det H_f(-4,-2) = e^{-4}(72-64)$ La forma è definita negativa e quindi (-4,-2) è un punto di massimo per g.

Per ∇h si ha $\begin{cases} y^2(6 - 2x - y) = 0 \\ xy(2x - 3y + 12) = 0 \end{cases}$ Le cui soluzioni sono $(\mathrm{x}, 0)$ $\forall$x, $(3/2, 3), (0, 6)$. $\det H_f(3/2, 3) = 18.27/2 - 81 > 0$ La forma è definita negativa e quindi (3/2,3) è un punto di massimo per h. $\det H_f(0,6) = 0 - 36^2 < 0$ La forma è indefinita e quindi (0,6) è un punto di sella per h.Per i punti (x,0) la forma quadratica risulta indefinita. $h(x,0) = 0$ e studiando il segno della funzione in un intorno di tali punti si trova che (x,0) è un punto di minimo se 0<x<6, è un punto di massimo se x<0 oppure x>6, mentre è un punto di sella se x=0 oppure x=6.