Suddivisione degli Argomenti

0. Bibliografia

[**Doplicher and Roberts, 1989**] Sergio Doplicher and John E. Roberts. **A new duality theory for compact groups.** Inventiones Mathematicae, 98(1):157218, 1989.

[**Longo and Roberts, 1997**] Roberto Longo and John E. Roberts. **A theory of dimension.** K-Theory, 11(2):103159, 1997.

[**Joyal and Street, 1991**] Andre Joyal and Ross Street. **An introduction to Tannaka duality and quantum groups.** In Category theory (Como, 1990), volume 1488 of Lecture Notes in Math., pages 413492. Springer, Berlin, 1991.

[**Mac Lane, 1998**] Saunders Mac Lane. **Categories for the working mathematician.** Springer- Verlag, New York, second edition, 1998.

[**Muger et al., 2004**] Michael Muger, John E. Roberts, and Lars Tuset. **Representations of algebraic quantum groups and reconstruction theorems for tensor categories.** Algebras and Representation Theory, 7(5):517573, 2004.

[**Algebraic Quantum Field Theory, 2006**] Hans Halvorson. **Algebraic Quantum Field Theory, (with an appendix by Michael Muger)**.

1. Preliminari su Categorie e Funtori

Ricordiamo alcune definizioni elementari.

Una **categoria** $\mathcal{C}$ consiste di:

1. Una classe di **oggetti** $Obj(\mathcal{C})$;
2. Per ogni coppia di $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, un insieme di **frecce**, o **morfismi**, $f : X \longrightarrow Y$, denotata con $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
3. Una **legge di composizione** associativa tra morfismi:

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

   per ogni $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$.

Si richiede, inoltre, che per ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$ esista un morfismo $id_X : X \longrightarrow X$ tale che $f \circ id_X = f$ e $id_X \circ g = g$, per ogni $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$.

Dati due oggetti $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ si dice **isomorfismo** se esiste un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tale che $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$. Se tra due oggetti esiste un isomorfismo diremo che X e Y sono **isomorfi**, e scriveremo $X \cong Y$.

Una sottocategoria $\mathcal{D}$ di una categoria $\mathcal{C}$

è una categoria tale che

1. $Obj(\mathcal{D})$ è una sottoclasse di $Obj(\mathcal{C})$;
2. $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$ è un sottoinsieme di $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$;
3. La legge di composizione ristretta ai morfismi di $\mathcal{D}$ è chiusa, vale a dire per ogni $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ morfismi di $\mathcal{D}$

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

è un morfismo di $\mathcal{D}$, $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{D})$.

Se $\mathcal{D}$ è una sottocategoria di $\mathcal{C}$ scriveremo $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$.

Una sottocategoria $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ si dice **piena** se $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{D})$.

Passiamo ora ai funtori. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie.

Un funtore (covariante) F tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$

associa
- ad ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$ un $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$,
- ad ogni $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$,

in modo tale che $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, per ogni coppia di morfismi f, g di $\mathcal{C}$, e $F(id_X) = id_{F(X)}$ per ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$. Denoteremo spesso un funtore con scrivendo $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ o semplicemente F.

Dato un funtore F, consideriamo la mappa

$$F_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), F_{X,Y}(f) = F(f).$$

Diremo che:
- F è **fedele** se $F_{X,Y}$ è iniettiva;
- F è **pieno** se $F_{X,Y}$ è suriettiva;

per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$.

Un funtore F si dice **essenzialmente suriettivo** se per ogni $Y \in Obj(\mathcal{D})$ esiste $X \in Obj(\mathcal{C})$ tale che $F(X) \cong Y$.
Dati due funtori $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, una **trasformazione naturale** η da F a G associa ad ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$ un morfismo $\eta_X \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

commuti.
Se ogni η_X è un isomorfismo, per ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$, allora chiameremo η **isomorfismo naturale**. Una trasformazione naturale η da F a G si denota spesso scrivendo $\eta : F \longrightarrow G$.

Dati due funtori $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$, $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ è possibile definire un funtore $GF : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ ponendo

1. $GF(X) = G(F(X))$, per ogni $X \in Obj(\mathcal{C}_1)$;
2. $GF(f) = G(F(f)) : G(F(X)) \longrightarrow G(F(Y))$, per ogni $f \in Hom_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$.

Un funtore $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ si dice una **equivalenza di categorie** se

esiste un funtore $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ed isomorfismi naturali $\eta : FG \longrightarrow id_{\mathcal{D}}$, $\epsilon : GF \longrightarrow id_{\mathcal{C}}$.
Due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ di dicono **equivalenti**, e si scrive $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, se esiste una equivalenza di categorie $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **piccola** se $Obj(\mathcal{C})$ è un insieme, mentre si dice **essenzialmente piccola** se è equivalente ad una categoria piccola.

Ricordiamo che date due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, il loro **prodotto** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ è definito ponendo semplicemente

$$- \; Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{D}),$$

$$- \; Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}(X \times Y, Z \times W) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{D}}(Z, W),$$

$$- \; id_{X \times Y} = id_X \times id_Y,$$

con ovvia legge di composizione

$$(f \times g) \circ (h \times k) = (f \circ g) \times (g \circ k).$$

2. Categorie Tensoriali e Braidings (o Intrecciamenti)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice tensoriale (stretta) se

esiste un oggetto $\mathbf{1}$, detto **unità tensoriale**, ed un funtore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tali che:

1. $\otimes$ è associativo, ossia $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ e $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$, per ogni X, Y, Z, X', Y', Z' e $f : X \longrightarrow X'$,$g : Y \longrightarrow Y'$ e $h : Z \longrightarrow Z'$.
2. $\mathbf{1} \otimes X = X \otimes \mathbf{1} = X$ e $f \otimes id_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}} \otimes f = f$, per ogni oggetto X e morfismo $f : X \longrightarrow Y$.
3. $(f \otimes g) \circ (h \otimes k) = (f \circ h) \otimes (g \circ k)$ per tutti i morfismi f, g, h, k opportunamente definiti.

Le definizioni di sottocategoria e di categoria piena si estendono senza problemi alle categorie tensoriali. La definizione di equivalenza tra categorie tensoriali si estende richiedendo semplicemente che i funtori e le trasformazioni naturali usate siano tensoriali. Funtori e trasformazioni naturali di tipo tensoriale sono definite nelle prossime slides.

Un **funtore tensoriale** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tra categorie tensoriali è un funtore dotato di isomorfismi $d^F_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \longrightarrow F(X \otimes Y)$, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, ed un morfismo $e^F : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ tali che
1- gli isomorfismi $d^F_{X,Y}$ sono naturali per entrambi gli argomenti, vale a dire il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "F(f)\otimes F(g)"] \arrow[d, "d^F_{X,Y}"] & F(Z) \otimes F(W) \arrow[d, "d^F_{Z,W}"] \\ F(X \otimes Y) \arrow[r, "F(f\otimes g)"] & F(Z \otimes W), \end{tikzcd}$$

per ogni $f : X \longrightarrow Z$, $g : Y \longrightarrow W$;
2- il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes F(Y) \otimes F(Z) \arrow[r, "d^F_{X,Y}\otimes id_{F(Z)}"] \arrow[d, "id^F_{F(X)}\otimes d^F_{Y,Z}"] & F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "d^F_{X\otimes Y,X}"] \\ F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "d^F_{X,Y\otimes Z}"] & F(X \otimes Y \otimes Z); \end{tikzcd}$$

3- le seguenti composizioni sono l'identità su $F(X)$

$$F(X) \equiv F(X) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{id_{F(X)} \otimes e^F} F(X) \otimes F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{d^F_{X,\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}} F(X \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \equiv F(X),$$

$$F(X) \equiv \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \otimes F(X) \xrightarrow{e^F \otimes id_{F(X)}} F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \otimes F(X) \xrightarrow{d^F_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}},X}} F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \otimes X) \equiv F(X),$$

per ogni $X \in Obj(\mathcal{C})$.

Se $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sono funtori tensoriali, una trasformazione naturale η si dice **tensoriale** se rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "d^F_{X,Y}"] \arrow[d, "\eta_X \otimes \eta_Y"] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\eta_{X \otimes Y}"] \\
G(X) \otimes G(Y) \arrow[r, "d^G_{X,Y}"] & G(X \otimes Y),
\end{tikzcd}$$

per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e la seguente composizione coincide con e^G

$$\mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{e^F} F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\eta_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}}} G(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}).$$

Un **braiding** (o **intrecciamento**) su una categoria tensoriale $\mathcal{C}$

è una famiglia di isomorfismi $c_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, tali che

1- per ogni $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \arrow[r, "c_{X,Y}"] \arrow[d, "f\otimes g"] & Y \otimes X \arrow[d, "g\otimes f"] \\ X' \otimes Y' \arrow[r, "c_{X',Y'}"] & Y' \otimes X'; \end{tikzcd}$$

2- valgono le "braid equations", ossia i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[r, "c_{X,Y}\otimes id_Z"] \arrow[dr, "c_{X,Y\otimes Z}"'] & Y \otimes X \otimes Z \arrow[d, "id_Y\otimes c_{X,Z}"] \\ & Y \otimes Z \otimes X, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \otimes Y \otimes Z \arrow[r, "id_X\otimes c_{Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X\otimes Y,Z}"'] & Y \otimes X \otimes Z \arrow[d, "c_{X,Z}\otimes id_Y"] \\ & Y \otimes Z \otimes X, \end{tikzcd}$$

per ogni $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$.

Un braiding che soddisfa $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$ si dice **simmetria**.

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie tensoriali con braiding e $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore tensoriale. Diremo che F è **intrecciato** se

$$F(c_{X,Y}) = c_{F(X),F(Y)},$$

per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$. Ovviamente l'isomorfismo del membro di destra si riferisce al braiding di $\mathcal{D}$, mentre quello che compare a sinistra si riferisce al braiding di $\mathcal{C}$.

3. Categorie Additive, $\mathbb{C}$-lineari e *-Categorie

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice additiva se:

1. $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è un un gruppo abeliano per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e la composizione è bilineare;
2. per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ esiste $Z \in Obj(\mathcal{C})$ tale che $Z \cong X \oplus Y$, vale a dire esistono morfismi $u : X \longrightarrow Z$, $u' : Z \longrightarrow X$, $v : Y \longrightarrow Z$, $v' : Z \longrightarrow X$ tali che $u' \circ u = id_X$, $v' \circ v = id_Y$ e $u' \circ u + v' \circ v = id_Z$ (tutto ha senso dato che la classe dei morfismi tra due oggetti qualsiasi è un gruppo);
3. Esiste un oggetto $\mathbf{0}$ tale che $Hom_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0})$ contengono precisamente un elemento.

Nel secondo punto è contenuta la definizione di **somma diretta** a livello di categorie. Precisiamo che Z è definito a meno di isomorfismi.
Nel terzo punto è contenuta la definizione di oggetto **zero** della categoria. Chiaramente due oggetti zero di una stessa categoria sono isomorfi e morfismi che partono da un oggetto zero o arrivano in un oggetto zero si dicono **morfismi zero**. Composizioni con il morfismo zero danno chiaramente ancora il morfismo zero (e lo stesso vale per $\otimes$).

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice $\mathbb{C}$-lineare se:

$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con legge di composizione bilineare. Se $\mathcal{C}$ è tensoriale richiediamo che $\otimes : (f, g) \longrightarrow f \otimes g$ sia bilineare.

Funtori tra categorie $\mathbb{C}$-lineari saranno sempre intesi $\mathbb{C}$-lineari a livello dei morfismi.

Una ***-operazione positiva** su una categoria $\mathbb{C}$-lineare $\mathcal{C}$ consiste di

una famiglia di mappe $^* : f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow f^* \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ che siano antilineari, involutive ($(f^*)^* = f$) e positive ($f^* \circ f = 0$ implica $f = 0$).

È chiaro che una categoria $\mathbb{C}$-lineare $\mathcal{C}$ si dirà una ***-categoria** se possiede una *- operazione positiva e che una ***-categoria tensoriale** $\mathcal{C}$ è una categoria tensoriale dotata di *-operazione positiva tale che $(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*$ per ogni coppia di morfismi f, g.

Su una *-categoria $\mathcal{C}$ ha senso il concetto di isometria e di morfismo unitario.

Sia $\mathcal{C}$ una *-categoria e siano $X, Y \in Obj_{\mathcal{C}}$.

Un morfismo $v : X \longrightarrow Y$ si dice **isometria** se $v^* \circ v = id_X$, mentre si dice **unitario** se $v : X \longrightarrow Y$ e $v^* : Y \longrightarrow X$ sono isometrie. Indichiamo con $End(X)$ la classe dei morfismi $X \longrightarrow X$. Un morfismo $p \in End(X)$ si dice **proiettore (o proiezione)** se $p = p^* = p \circ p$.

Nella definizione di somma diretta per *-categorie si richiede che u, v siano isometrie.

Diremo che una *-categoria ammette **sotto-oggetti** se per ogni proiezione $p \in End(X)$ esiste una isometria $v : Y \longrightarrow X$ tale che $v \circ v^* = p$.

Per un funtore F tra *-categorie si richiederà sempre che preservi l'operazione *, mentre per un funtore tra *-categorie tensoriali si richiede che i morfismi $d_{X,Y}$ siano unitari.

Sia $\mathcal{C}$ una *-categoria tensoriale e sia $X \in Obj_{\mathcal{C}}$.

Un oggetto $\overline{X} \in Obj(\mathcal{C})$ si dice un **oggetto coniugato** di X se esistono morfismi $r : \mathbf{1} \longrightarrow \overline{X} \otimes X$, $\overline{r} : \mathbf{1} \longrightarrow X \otimes \overline{X}$ tali che

$$id_X \otimes r^* \circ \overline{r} \otimes id_X = id_X,$$

$$id_{\overline{X}} \otimes \overline{r}^* \circ r \otimes id_{\overline{X}} = id_{\overline{X}}.$$

Da ora in poi ci riferiremo a queste identità chiamandole **equazioni coniugate**. Chiameremo la terna $(\overline{X}, r, \overline{r})$ un **coniugato** di X.

Una categoria $\mathcal{C}$ ammette coniugati se ogni oggetto ammette un coniugato. Si dimostra che l'oggetto zero non ammette coniugato e che se X ammette due coniugati $(\overline{X}, r, \overline{r})$ e $(\overline{X}', r', \overline{r}')$ allora il morfismo $id_{\overline{X}'} \otimes \overline{r}^* \circ r' \otimes id_{\overline{X}} : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}'$ è unitario e dunque il coniugato è unico a meno di equivalenza unitaria.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria $\mathbb{C}$-lineare e sia $X \in Obj_{\mathcal{C}}$.

Diremo che X è **irriducibile** se $End(X) = \mathbb{C} id_X$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.

Diremo che $\mathcal{C}$ è di tipo **TC*** se è una *-categoria tensoriale tale che

1. $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ha dimensione finita, per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$;
2. $\mathcal{C}$ ammette coniugati, sotto-oggetti e somme dirette;
3. $\mathbf{1}$ è irriducibile.

Una categoria TC* si dice di tipo **BTC*** se ammette un braiding unitario. Una categoria TC* si dice di tipo **STC*** se ammette simmetria unitaria.

Si dimostra che una categoria $\mathcal{C}$ di tipo TC* è sempre **semisemplice**, vale a dire ogni oggetto è una somma diretta finita di oggetti irriducibili.

4. Alcuni cenni sulla teoria della dimensione di Longo-Roberts, C*-categorie

4. Alcuni cenni sulla teoria della dimensione di Longo-Roberts, C*-categorie

Sia $\mathcal{C}$ una *-categoria e $X \in Obj(\mathcal{C})$.

Un coniugato $(\overline{X}, r, \overline{r})$ di X si dice **coniugato standard** se

$$r^* \circ id_{\overline{X}} \otimes f \circ r = \overline{r}^* \circ f \otimes id_{\overline{X}} \circ \overline{r},$$

per ogni $f \in End(X)$.

Sia ora $\mathcal{C}$ una categoria TC*. Se $X \in Obj(\mathcal{C})$ è irriducibile allora $End(X) = \mathbb{C} id_X$ e quindi, preso $(\overline{X}, r, \overline{r})$ un coniugato di X, la condizione standard da verificare diventa $r^* \circ r = \overline{r}^* \circ \overline{r}$, e dunque riscalando opportunamente $\overline{r}, \overline{r}^*$, si ottiene un coniugato standard.
Se X non è irriducibile possiamo scriverlo come somma diretta di irriducibili $X = \bigoplus_i X_i$. Definiamo allora $\overline{X} = \bigoplus_i \overline{X}_i$, dove $(\overline{X}_i, r_i, \overline{r}_i)$ è un coniugato standard per X_i. Siano $v_i : X_i \longrightarrow X$ e $w_i : \overline{X}_i \longrightarrow \overline{X}$ le isometrie derivanti dalle somme dirette e poniamo

$$r = \sum_i w_i \otimes v_i \circ r_i,$$

$$\overline{r} = \sum_i v_i \otimes w_i \circ \overline{r}_i.$$

4. Alcuni cenni sulla teoria della dimensione di Longo-Roberts, C*-categorie

Si dimostra ([Longo and Roberts, 1997]) che $(\overline{X}, r, \overline{r})$ è un coniugato standard di X e che, dunque, in una categoria TC* ogni oggetto ammette coniugato standard, in particolare ogni oggetto ammette coniugato. Diamo ora alcuni fatti importanti la cui dimostrazione si trova in [Longo and Roberts, 1997].

Sia $\mathcal{C}$ una categoria TC*

1. Sia $(\overline{X}, r, \overline{r})$ un coniugato per X e sia $p \in End(X)$ una proiezione. Allora l'endomorfismo

$$\overline{p} := r^* \otimes id_{\overline{X}} \circ id_{\overline{X}} \otimes p \otimes id_{\overline{X}} \circ id_{\overline{X}} \otimes \overline{r} \in End(\overline{X})$$

   è una proiezione e se $v : Y \longrightarrow X$, $w : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ sono isometrie tali che $v \circ v^* = p$, $w \circ w^* = \overline{p}$ allora $(\overline{Y}, w^* \otimes v^* \circ r, v^* \otimes w^* \circ \overline{r})$ è un coniugato per Y. Analogo discorso per i coniugati standard.

2. Se $(\overline{X}, r, \overline{r})$, $(\overline{Y}, r', \overline{r}')$ sono coniugati per X, Y rispettivamente, allora $(\overline{X} \otimes \overline{Y}, r'', \overline{r}'')$ è un coniugato per $X \otimes Y$ dove

$$r'' = id_{\overline{Y}} \otimes r \otimes id_Y \circ r',$$

$$\overline{r}'' = id_X \otimes \overline{r}' \circ id_{\overline{X}} \circ \overline{r}.$$

   Analogamente per i coniugati standard.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria TC*.

Per $X \in Obj(X)$, con coniugato standard $(\overline{X}, r, \overline{r})$, la mappa

$$Tr_X : End(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita ponendo

$$Tr_X(f) = r^* \circ id_{\overline{X}} \otimes f \circ r,$$

per ogni $f \in End(X)$, si dice **traccia**.

Proposizione.

Per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ la traccia non dipende da $(\overline{X}, r, \overline{r})$ e soddisfa le seguenti proprietà:

1. $Tr_X(f \circ g) = Tr_Y(g \circ f)$ per ogni $f : Y \longrightarrow X$, $g : X \longrightarrow Y$.
2. $Tr_{X \otimes Y}(f \otimes g) = Tr_X(f) Tr_Y(g)$ per ogni $f \in End(X)$ e $g \in End(Y)$.

Grazie alla precedente proposizione, ha senso la seguente definizione.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria TC*, $X \in Obj(\mathcal{C})$ e $(\overline{X}, r, \overline{r})$ un coniugato standard per X.

Il numero complesso

$$d(X) := Tr_X(id_X),$$

che coincide con $r^* \circ r$ si dice **dimensione** di X (che, per la proposizione precedente, non dipende dal coniugato standard scelto per esprimere la traccia).

Diamo ora alcune proprietà della dimensione, per le quali rimandiamo a [Longo and Roberts, 1997].

Alcune importanti proprietà della dimensione valide per ogni $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$

1. $d(X \oplus Y) = d(X) + d(Y)$;
2. $d(X \otimes Y) = d(X)d(Y)$;
3. $d(X) \geq 1$. Se $d(X) = 1$ allora $X \otimes \overline{X} \cong \mathbf{1}$, ed in tal caso si dice che X è **invertibile**;

4. Alcuni cenni sulla teoria della dimensione di Longo-Roberts, C*-categorie

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.

Diremo che $\mathcal{C}$ è una **C*-categoria** se è $\mathbb{C}$-lineare con una *-operazione positiva tale che:

1. $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è uno spazio di Banach;
2. $\|f \circ g\|_{X,Z} \leq \|f\|_{X,Y}\|g\|_{Y,Z}$, per ogni $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$.
3. $\|f^* \circ f\|_{X,X} = \|f\|^2_{X,Y}$ per ogni $f : X \longrightarrow Y$.

Una categoria C*-tensoriale è una C*-categoria tale che

$$\|f \otimes g\|_{X \otimes Z, Y \otimes W} \leq \|f\|_{X,Y}\|g\|_{Z,W},$$

per ogni $f : X \longrightarrow Y$, $g : Z \longrightarrow W$.

Il punto 3) dice chiaramente che $End(X)$ deve essere una C*-algebra.

4. Alcuni cenni sulla teoria della dimensione di Longo-Roberts, C*-categorie

Teorema.

Sia $\mathcal{C}$ una C*-categoria tensoriale con somme dirette ed unità tensoriale irriducibile. Se $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ ammettono coniugati allora $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ha dimensione finita. Dunque una C*-categoria tensoriale con somme dirette, sotto-oggetti, coniugati ed unità irriducibile è di tipo TC*. Viceversa data $\mathcal{C}$ una categoria TC*, esistono, e sono uniche, norme sugli spazi dei morfismi tali che $\mathcal{C}$ è una C*-categoria tensoriale.

Un esempio importante.

Denotiamo con $\mathcal{H}ilb$ la categoria degli spazi di Hilbert finito dimensionali. Questa categoria è di tipo STC*. Infatti:

1. la simmetria $c_{H,K} : H \otimes K \longrightarrow K \otimes H$ è il morfismo di **flip**, $x \otimes y \longrightarrow y \otimes x$, con $x \in H \in Obj(\mathcal{H}ilb)$, $y \in K \in Obj(\mathcal{H}ilb)$;
2. il coniugato di uno spazio di Hilbert è il suo duale $\overline{H}$ e si ha

$$r(\lambda) = \lambda \sum f_i \otimes e_i, \overline{r}(\lambda) = \lambda \sum e_i \otimes f_i,$$

con f_i base di H e e_i base duale in $\overline{H}$.

5. Dualità di Tannaka classica

Richiamiamo brevemente la **dualità di Pontrjagin**. Sia G un gruppo commutativo e localmente compatto (sempre di Hausdorff anche quando non specificato). Un **carattere** è un omomorfismo continuo $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$, dove $\mathbb{T}$ è il gruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. L'insieme dei caratteri di G forma un gruppo commutativo $\widehat{G}$, che con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di G diventa un gruppo localmente compatto (sempre di Hausdorff). Si definisce l'accoppiamento canonico $(\,,\,) : \widehat{G} \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo $(\varphi, g) = \varphi(g)$, per ogni $(\varphi, g) \in \widehat{G} \times G$ dal quale ne deduciamo un omomorfismo canonico $i : G \longrightarrow \widehat{(\widehat{G})}$.

Teorema (Pontrjagin).

L'omomorfismo canonico i è un isomorfismo tra gruppi topologici.

Inoltre, si può dimostrare che assumere G compatto equivale ad assumere $\widehat{G}$ discreto. L'accoppiamento canonico permette di definire una **trasformata di Fourier**. Sia dx la misura di Haar su G, unica a meno di multipli scalari. Sappiamo che si tratta di una misura di Borel positiva ed invariante per traslazioni grazie alla quale possiamo definire $L^1(G)$ e $L^2(G)$.

Trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F} : L^1(G) \cap L^2(G) \longrightarrow L^2(\widehat{G})$$

$$(\mathcal{F}f)(s) := \int_G f(x)\overline{(s,x)}dx$$

Siccome $L^1(G) \cap L^2(G)$ è un sottospazio denso di $L^2(G)$, normalizzando opportunamente ds su $\widehat{G}$, abbiamo che la mappa $f \longrightarrow \mathcal{F}f$ si estende unicamente ad una isometria $L^2(G) \longrightarrow L^2(\widehat{G})$ (Teorema di Plancherel). La trasformata inversa è data da

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \int_{\widehat{G}} g(s)(s,x)ds.$$

La misura ds su $\widehat{G}$ che rende $\mathcal{F}$ una isometria è unica e si dice la misura associata a dx.

Passiamo ora alla dualità di Tannaka. Così come la teoria della dualità di Pontrjagin permette di ricostruire un gruppo G, localmente compatto e commutativo, a partire dal suo duale $\widehat{G}$, la teoria della dualità di Tannaka permette di ricostruire un gruppo G, compatto ma non commutativo, a partire dalle sue (classi di equivalenza di) rappresentazioni unitarie, irriducibili e di dimensione finita.

5. Dualità di Tannaka classica

Il gruppo dei caratteri di un gruppo abeliano localmente compatto si può identificare con il gruppo delle rappresentazioni unitarie unidimensionali del gruppo stesso. In questo caso, ovviamente, il prodotto di rappresentazioni unitarie unidimensionali rimane una rappresentazione unitaria unidimensionale. Nel caso di un gruppo compatto G le rappresentazioni irriducibili non sono necessariamente unidimensionali ed in questo caso il prodotto di rappresentazioni deve essere sostituito da un prodotto tensoriale di rappresentazioni che "sfortunatamente" è ben lontano dal dare una struttura di gruppo.

Sia G un gruppo compatto (sempre di Hausdorff), non commutativo.

Denotiamo con $Rep(G)$

la categoria delle rappresentazioni unitarie, finito dimensionali e continue. In questa categoria abbiamo che:

1. $Obj(Rep(G))$ è costituito da tutti gli omomorfismi della forma $\pi_V : G \longrightarrow \mathcal{U}(V)$, dove V $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathcal{U}(V)$ gruppo degli unitari di V.
2. $Hom_{Rep(G)}(\pi_V, \pi_W)$ è formato da tutti gli operatori di allacciamento $T : V \longrightarrow W$, ossia tali che $T\pi_V(g) = \pi_W(g)T$, per ogni $g \in G$.
3. La legge di composizione è l'usuale composizione tra operatori lineari.

5. Dualità di Tannaka classica

Denotiamo con $Vect_{\mathbb{C}}$

la categoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ finito dimensionali. In questa categoria abbiamo che:

1. $Obj(Vect_{\mathbb{C}})$ è costituito da tutti $\mathbb{C}$-spazi vettoriali di dimensione finita.
2. $Hom_{Vect_{\mathbb{C}}}(V, W)$ è formato da tutti gli operatori lineari $T : V \longrightarrow W$, ossia $Hom_{Vect_{\mathbb{C}}}(V, W) = Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$.
3. La legge di composizione è l'usuale composizione tra operatori lineari.

Denotiamo con $\mathcal{F} : Rep(G) \longrightarrow Vect_{\mathbb{C}}$

il **funtore di immersione**, ossia quel funtore che associa ad una rappresentazione π_V lo spazio vettoriale V su cui la rappresentazione opera e che associa ad ogni operatore di allacciamento $T : V \longrightarrow W$ se stesso.

Non è difficile verificare che $Rep(G)$ e $Vect_{\mathbb{C}}$ sono categorie di tipo TC*, vale a dire sono *-categorie tensoriali per le quali i morfismi hanno dimensione finita, ammettono somme dirette, sotto-oggetti, coniugati ed una unità tensoriale irriducibile.

5. Dualità di Tannaka classica

Il funtore di immersione preserva la struttura *-tensoriale delle due categorie, come si vede con facili verifiche.

Denotiamo con $End(\mathcal{F})$

il sottoinsieme delle trasformazioni naturali unitarie $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ che preservano la struttura *-tensoriale.

È utile ricordare che una trasformazione naturale ed unitaria $\eta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ associa ad ogni rappresentazione $\pi_V \in Obj(Rep(G))$ un morfismo $\eta_{\pi_V} \in Hom_{Rep(G)}(\pi_V, \pi_V)$ tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\pi_V) = V & \xrightarrow{\mathcal{F}(T)=T} & \mathcal{F}(\pi_W) = W \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{\pi_V}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{\pi_W}} \\ \mathcal{F}(\pi_V) = V & \xrightarrow{\mathcal{F}(T)=T} & \mathcal{F}(\pi_W) = W \end{array}$$

commuti. Qui $T : V \longrightarrow W$ è un operatore di allacciamento. Dovendo, per definizione, η_V $(=: \eta_{\pi_V})$ essere un unitario, vediamo che $End(\mathcal{F})$ si può pensare come sottogruppo chiuso del prodotto

$$\prod_{V \in Obj(Vect_{\mathbb{C}})} \mathcal{U}(V)$$

e dunque è compatto.

Teorema di Dualità di Tannaka.

Sia $g \in G$. Gli omomorfismi tra spazi vettoriali $\pi_V(g) : V \longrightarrow V$, al variare di $\pi_V \in Obj(Rep(G))$, verificano la definizione di trasformazione naturale. In altre parole ad ogni $g \in G$ possiamo associare una trasformazione naturale, che denotiamo con $\pi(g)$, contenuta in $End(\mathcal{F})$ e dunque abbiamo una applicazione

$$\pi : G \longrightarrow End(\mathcal{F}),$$

che è un isomorfismo di gruppi.

Il teorema di Krein si inserisce in questo contesto classico, rispondendo ad un'altra domanda. Per esporre la teoria di Tannaka siamo partiti da un gruppo compatto G ad abbiamo considerato la sua categoria $Rep(G)$. Questa categoria è di tipo TC*. Dal momento che ci sono altre categorie, diverse da $Rep(G)$, che sono TC*, è ragionevole chiedersi se per categorie di questo tipo esiste un gruppo la cui categoria di rappresentazioni è proprio quella di partenza. Il teorema di Krein risponde, in un certo senso, a questa domanda.

Teorema di Krein.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria i cui oggetti sono spazi vettoriali di dimensione finita e i morfismi sono le applicazioni lineari, dotata di un prodotto tensoriale e di coniugati. Le seguenti condizioni sono necessarie e sufficiente affinché esista un gruppo compatto G tale che $Rep(G) \cong \mathcal{C}$:

1. esiste una unità tensoriale;
2. $\mathcal{C}$ è semisemplice;
3. Se V, W sono oggetti irriducibili allora $Hom_{\mathcal{C}}(V, W)$ ha dimensione 1 (quando sono isomorfi) oppure dimensione 0.

In sostanza il teorema di Krein ci dice come deve essere fatta una categoria per poter essere pensata come categoria $Rep(G)$ di un gruppo G.

6. Teorema di Tannaka-Krein

6. Teorema di Tannaka-Krein

Vogliamo ora riformulare i due teoremi appena enunciati in chiave più moderna, utilizzando "solo" le categorie. Diamo qualche definizione.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria di tipo STC*.

Un **funtore fibra** per $\mathcal{C}$ è un funtore tensoriale fedele $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{H}ilb$ che preserva lo * e la simmetria (ricordiamo che anche $\mathcal{H}ilb$ è di tipo STC*).

Una categoria $\mathcal{C}$ di tipo STC* dotata di funtore fibra E è equivalente ad una sottocategoria (non piena) di $\mathcal{H}ilb$. Per questo motivo si dice che $\mathcal{C}$ è **concreta**.

Assumiamo allora che $\mathcal{C}$ sia una categoria STC* dotata di funtore fibra E come nella definizione. Sia G_E l'insieme delle trasformazioni tensoriali naturali, unitarie, da E in se. Si tratta di un gruppo che può essere identificato con un sottogruppo chiuso di

$$\prod_{X \in Obj(\mathcal{C})} \mathcal{U}(E(X)),$$

dove $\mathcal{U}(E(X))$ è il gruppo compatto degli unitari sullo spazio di Hilbert finito dimensionale $E(X)$. Siccome il prodotto di questi gruppi è compatto e G_E si identifica ad un sottogruppo chiuso del prodotto, è anche esso compatto. G_E agisce sugli spazi di Hilbert $E(X)$, $X \in Obj(\mathcal{C})$, tramite rappresentazioni unitarie π_X definite ponendo $\pi_X(g) = g_X$, dove g_X è il morfismo su X derivante dalla definizione di trasformazione naturale $g \in G_E$.

6. Teorema di Tannaka-Krein

Si può dimostrare che esiste un funtore $F : \mathcal{C} \longrightarrow Rep(G_E)$ fedele, tensoriale, simmetrico, che preserva *, tale che $KF = E$ ("composizione" di funtori che abbiamo definito in precedenza), dove $K : Rep(G_E) \longrightarrow \mathcal{H}ilb$ è il funtore di immersione. Questo funtore associa ad ogni oggetto $X \in Obj(\mathcal{C})$ la rappresentazione $\pi_X : G_E \longrightarrow E(X)$ definita, come appena visto, ponendo $\pi_X(g) = g_X$, e si dimostra essere una equivalenza di categorie.

Teorema di Tannaka-Krein (versione concreta)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria di tipo STC* dotata di funtore fibra $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{H}ilb$. Sia G_E il gruppo compatto delle trasformazioni naturali e unitarie da E in se. Il funtore $F : \mathcal{C} \longrightarrow Rep(G_E)$, definito sopra, è una equivalenza di categorie STC*. Inoltre se E_1 è un altro funtore fibra per $\mathcal{C}$ allora $E \cong E_1$ e $G_E \cong G_{E_1}$.

Questo teorema comprende il Teorema di Tannaka e quello di Krein.

7. Teorema di Doplicher-Roberts

Concludiamo enunciando un risultato più profondo.

Teorema di Doplicher-Roberts (1989)

Sia $\mathcal{C}$ una C*-categoria tensoriale stretta, simmetrica, dotata di coniugati, sotto-oggetti, somme dirette e con unità tensoriale irriducibile. Allora esiste un gruppo G compatto (unico a meno di isomorfismi) tale che $\mathcal{C} \cong Rep(G)$.

Ricordando che una categoria di tipo STC* è fondamentalmente una C*-categoria tensoriale simmetrica, questo teorema afferma che il funtore fibra è, in un certo senso, non necessario per avere una equivalenza di categorie tipo quella del teorema di Tannaka-Krein nella versione concreta, vale a dire non occorre assumerlo nell'enunciato.