

Corso di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 7: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI -
PROBLEMI IPERBOLICI

A. Scrivere i codici

- **euleroAV**, **laxfriedrichs**, **laxwendroff**, **upwind**, **euleroIND**, che implementano un passo dei seguenti metodi alle differenze finite

- (a) Eulero in avanti/centrato
- (b) Lax-Friedrichs
- (c) Lax-Wendroff
- (d) Eulero in avanti/decentrato [Upwind]
- (e) Eulero all'indietro/centrato

per la discretizzazione del problema di trasporto scalare:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, & a > 0, x \in (\alpha, \beta), t > 0, \\ u(\alpha, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \quad (1)$$

- **leapfrog** che implementa il metodo Leap-Frog per la discretizzazione del problema dello spostamento trasversale di una corda elastica vibrante fissata agli estremi (ovvero con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee), soggetta all'azione di una forza verticale di densità $f(x, t)$; spostamento $u_0(x)$ e velocità $v_0(x)$ all'istante iniziale $t = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), & c \in \mathbb{R}, x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2)$$

B. Laboratorio MATLAB

1. Calcolare le soluzioni fornite dagli schemi numerici (a), (b), (c), (d), (e), all'istante $T = 4$, del problema iperbolico (1) con $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 5$, e dato iniziale a supporto compatto $u_0(x) = \sin^2(\pi x)\chi_{[0,1]}$ (dove $\chi_{[a,b]}$ denota la funzione caratteristica, che vale 1 in $[a, b]$ e 0 altrimenti), avendo fissato $\Delta x = 2.e - 2$ e $\Delta t = 1.e - 2$. (Nell'applicare i metodi, assumere $u(\beta, t) = 0$, per $t \leq T$.) Visualizzare la soluzione vera e la soluzione fornita dai differenti metodi - sia come superfici (utilizzando le functions **meshgrid** e **mesh** del MATLAB) che come animazione (in modalità 'drawnow').

2. Calcolare la soluzione numerica dell'equazione iperbolica del second'ordine (2) con $L = 1$, $c = 1$, $f(x, t) = 0$, $T = 5$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x) = 0$, data dallo schema Leap-Frog. (In particolare, fissare $\Delta x = 2.e - 2$ e $\Delta t = 1.e - 2$, approssimare opportunamente $u(x, \Delta t)$ - che deve fungere da coordinata di innesco - e applicare lo schema Leap-Frog.) Visualizzare la soluzione vera

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$$

e la soluzione numerica sia come superfici che come animazione.

Fare analogamente con $f(x, t) = 10 \exp(-t) \sin(\pi x)$ e $u_0(x) = \sin(\pi x)/10$. La soluzione del problema è

$$u(x, t) = \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi t)}{10} + 10 \sin(\pi x) \frac{\exp(-t) - \cos(\pi t) + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}}{1 + \pi^2}.$$