Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 6: Risoluzione numerica di equazioni alle derivate parziali - Problemi ellittici e parabolici

A. Scrivere il codice **thetametodo** che implementa il θ-metodo per l'integrazione in tempo del sistema di equazioni differenziali ordinarie che fornisce la semi-discretizzazione del problema unidimensionale dell'equazione del calore relativo ad un filo metallico di lunghezza unitaria con gli estremi tenuti a temperatura zero (ovvero con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee), termicamente isolato (quindi per ogni x si ha $u(x,t) \to 0$ per $t \to \infty$) e con distribuzione iniziale della temperatura $u_0(x)$:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

B. Laboratorio MATLAB

1. Scrivere uno script che calcoli la soluzione numerica con il metodo delle differenze finite del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) & = & 0, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

con $f(x,y) = \exp(x^2)\sin(2\pi y)$, e dove Ω è il cerchio unitario. Fissare $N = 52$. Fare uso delle functions **numgrid** e **delsq** del MATLAB (o di procedure analoghe) per definire il sistema lineare associato al metodo ∇_5^2. Per determinare le coordinate dei punti *interni* del reticolo - ai fini della valutazione della f - avvalersi delle coordinate dei punti del reticolo calcolati da **numgrid** (o da procedura analoga). Risolvere con il metodo del gradiente coniugato precondizionato tramite la fattorizzazione di Cholesky incompleta. Visualizzare la soluzione numerica utilizzando la function **mesh** del MATLAB con l'opzione 'axis square ij'.

2. Scrivere uno script che calcoli la soluzione numerica con il metodo delle differenze finite del problema di Dirichlet (2) con $f(x,y) = 8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, e dove Ω è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Discretizzare Ω con un reticolo a passo $h = 1/10$. Per determinare la numerazione dei punti interni di tale reticolo avvalersi di una procedura del tipo **numgrid**. Tenendo conto che la soluzione del problema di Dirichlet (2) è $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, calcolare la norma del massimo dell'errore. Fare analogamente con le discretizzazioni più fini di Ω date rispettivamente da $h = 1/20$ e $h = 1/40$. Commentare il risultato ottenuto. Confrontare i grafici dell'ultima soluzione numerica ottenuta e della soluzione vera $u(x,y)$ (usare **mesh**: nel primo caso con l'opzione 'axis square ij', nel secondo con l'opzione 'axis square xy').

3. Modificare lo script al punto 2. in modo che calcoli la soluzione numerica dell'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee (2) con $f(x, y) = 2x(1-x) + 2y(1-y)$ che ha soluzione $u(x, y) = xy(1-x)(1-y)$.

4. Approssimare la soluzione del problema (1) con $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ mediante semi-discretizzazione, applicando il codice **thetametodo** con $\theta \in \{0, 1/2, 1\}$. Fissare $\Delta x = 1.e-2$ e scegliere i passi temporali $\Delta t = 1.e-2$ e $\Delta t = 1.e-3$. Confrontare la soluzione vera $u(x, t) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x)$ con le soluzioni numeriche all'istante $T = 0.1$ fornite dai metodi di Eulero in avanti, di Crank Nicolson e di Eulero all'indietro usando i due passi temporali, e calcolare la norma infinito degli errori dati dagli schemi. Dedurre - quando possibile (ovvero, per $\theta = 1/2$ e $\theta = 1$) - gli ordini di consistenza in tempo degli schemi, altrimenti (ovvero, per $\theta = 0$) scegliere passi temporali adeguati. Commentare i risultati ottenuti. Visualizzare la soluzione vera e la soluzione fornita dallo schema di Crank Nicolson (per $\Delta t = 1.e-3$) - sia come superfici (utilizzando le functions **meshgrid** e **mesh** del MATLAB) che come animazione (in modalità 'drawnow').